

VECTORS, BASIC MATHS & CALCULUS

- 1.** किसी तार से प्रवाहित धारा समय पर निम्न रूप से निर्भर करती है $i = \alpha_0 t + \beta t^2$ यहाँ $\alpha_0 = 20 \text{ A/s}$ तथा $\beta = 8 \text{ As}^{-2}$ है इस तार के किसी भाग से 15 s में प्रवाहित होने वाला आवेश होगा:

 - (1) 2250 C
 - (2) 11250 C
 - (3) 2100 C
 - (4) 260 C

2. समान भुजा के किसी अष्टभुज ABCDEFGH में $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$ का योग क्या है, यदि $\overrightarrow{AO} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ है तो :

 - (1) $-16\hat{i} - 24\hat{j} + 32\hat{k}$
 - (2) $16\hat{i} + 24\hat{j} - 32\hat{k}$
 - (3) $16\hat{i} + 24\hat{j} + 32\hat{k}$
 - (4) $16\hat{i} - 24\hat{j} + 32\hat{k}$

3. यदि \vec{A} और \vec{B} ऐसे दो सदिश हैं जो संबंध $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$ की पुष्टि करते हैं तब $|\vec{A} - \vec{B}|$ का मान होगा :

 - (1) $\sqrt{A^2 + B^2}$
 - (2) $\sqrt{A^2 + B^2 + \sqrt{2}AB}$
 - (3) $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB}$
 - (4) $\sqrt{A^2 + B^2 - \sqrt{2}AB}$

4. दो सदिश \vec{P} और \vec{Q} के परिमाण समान हैं। यदि $\vec{P} + \vec{Q}$ का परिमाण $\vec{P} - \vec{Q}$ के परिमाण का n गुना है, तो \vec{P} और \vec{Q} के बीच का कोण है :

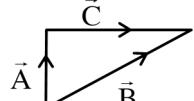
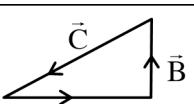
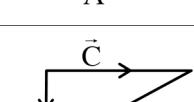
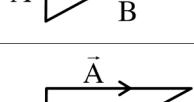
 - (1) $\sin^{-1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$
 - (2) $\cos^{-1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$
 - (3) $\sin^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$
 - (4) $\cos^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$

5. सदिश $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिये।

 - (1) $\sqrt{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$
 - (2) $2(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$
 - (3) $\sqrt{2}(\hat{i} + \hat{j})$
 - (4) $(\hat{i} + \hat{j})$

6. तीन कण P, Q और R क्रमशः सदिशों $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{C} = -\hat{i} + \hat{j}$ के अनुदिश गमन कर रहे हैं। ये किसी बिन्दु पर टकराते हैं और विभिन्न दिशाओं में गमन करना आरम्भ कर देते हैं। कण P उस तल के अभिलम्बवत भी गमन करता है जिसमें सदिश \vec{A} और \vec{B} हैं। इसी प्रकार कण Q उस तल के अभिलम्बवत गति कर रहा है जिसमें सदिश \vec{A} और \vec{C} हैं। P और Q की गति की दिशाओं के बीच कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ है। तो x का मान है _____.

- ## 7. सूची I और सूची II का मिलान कीजिए :

सूची I		सूची II	
(a)	$\vec{C} - \vec{A} - \vec{B} = 0$	(i)	
(b)	$\vec{A} - \vec{C} - \vec{B} = 0$	(ii)	
(c)	$\vec{B} - \vec{A} - \vec{C} = 0$	(iii)	
(d)	$\vec{A} + \vec{B} = -\vec{C}$	(iv)	

नीचे दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

- (1) (a) \rightarrow (iv), (b) \rightarrow (i) , (c) \rightarrow (iii), (d) \rightarrow (ii)
 (2) (a) \rightarrow (iv), (b) \rightarrow (iii) , (c) \rightarrow (i), (d) \rightarrow (ii)
 (3) (a) \rightarrow (iii), (b) \rightarrow (ii) , (c) \rightarrow (iv), (d) \rightarrow (i)
 (4) (a) \rightarrow (i), (b) \rightarrow (iv) , (c) \rightarrow (ii), (d) \rightarrow (iii)

8. दो सदिशों \vec{X} और \vec{Y} के परिमाण समान हैं।

$(\vec{X} - \vec{Y})$ का परिमाण $(\vec{X} + \vec{Y})$ के परिमाण का n गुना है। \vec{X} और \vec{Y} के बीच के कोण का मान है :

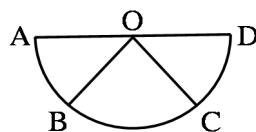
- (1) $\cos^{-1}\left(\frac{-n^2 - 1}{n^2 - 1}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{n^2 - 1}{-n^2 - 1}\right)$
 (3) $\cos^{-1}\left(\frac{n^2 + 1}{-n^2 - 1}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}\right)$

9. अभिकथन A : यदि A, B, C, D अर्ध वृत्त (केन्द्र 'O') पर स्थित चार बिन्दु इस प्राकार हैं कि $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}|$ तो

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{AO} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

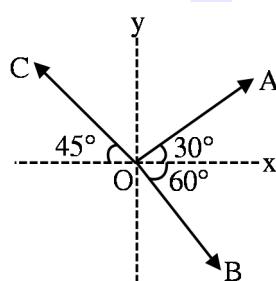
कारण R : सदिशों के बहुभुज नियम के अनुसार

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD} = 2\vec{AO}$$



उपरोक्त कथनानुसार, सबसे उपयुक्त विकल्प को दिए गए विकल्पों में से चुनिए :

- (1) A सही है परन्तु R सही नहीं है।
 (2) A सही नहीं है परन्तु R सही है।
 (3) दोनों A और R सही हैं और R, A की सही व्याख्या है।
 (4) दोनों A और R सही हैं R, A की सही व्याख्या नहीं है।
10. चित्र में सदिशों \vec{OA} , \vec{OB} तथा \vec{OC} के परिमाण समान हैं। x- अक्ष के साथ $\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$ की दिशा होगी :-



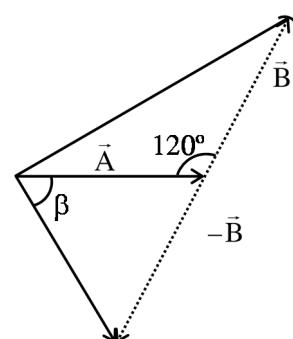
$$(1) \tan^{-1} \frac{(1 - \sqrt{3} - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$(2) \tan^{-1} \frac{(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$(3) \tan^{-1} \frac{(\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$(4) \tan^{-1} \frac{(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

11. सदिश (\vec{A}) तथा $(\vec{A} - \vec{B})$ के बीच कोण है -

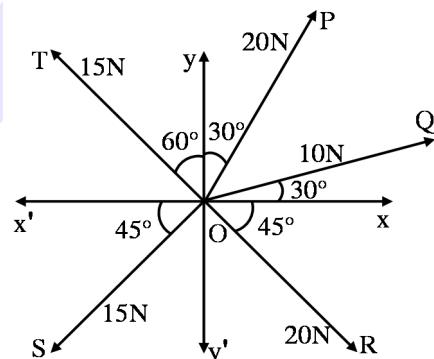


$$(1) \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{B}{2}}{\frac{A - B}{2\sqrt{3}}} \right) \quad (2) \tan^{-1} \left(\frac{A}{0.7B} \right)$$

$$(3) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}B}{2A - B} \right) \quad (4) \tan^{-1} \left(\frac{B \cos \theta}{A - B \sin \theta} \right)$$

12. चित्रानुसार बलों \vec{OP} , \vec{OQ} , \vec{OR} , \vec{OS} तथा \vec{OT} का परिणामी लगभग होता है :

[मान लिजिए: $\sqrt{3} = 1.7$, $\sqrt{2} = 1.4$ । दिया है \hat{i} तथा \hat{j} क्रमशः x तथा y अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश हैं]



- (1) $9.25\hat{i} + 5\hat{j}$ (2) $3\hat{i} + 15\hat{j}$
 (3) $2.5\hat{i} - 14.5\hat{j}$ (4) $-1.5\hat{i} - 15.5\hat{j}$

13. कथन I :

दो बल $(\bar{P} + \bar{Q})$ तथा $(\bar{P} - \bar{Q})$ जहाँ $\bar{P} \perp \bar{Q}$, जब एक दूसरे से θ_1 कोण पर लगते हैं, तो परिणामी का परिमाण $\sqrt{3(P^2 + Q^2)}$ होता है तथा जब θ_2 कोण पर लगते हैं, तो परिणामी का परिमाण $\sqrt{2(P^2 + Q^2)}$ होता है। यह तभी सम्भव होता है जब $\theta_1 < \theta_2$ है।

कथन II :

उपर्युक्त दी गयी दशा में $\theta_1 = 60^\circ$ तथा $\theta_2 = 90^\circ$ उपर्युक्त कथनों के अवलोकन में, नीचे दिए गये विकल्पों से उपयुक्त उत्तर चुनिए।

- (1) कथन-I असत्य है परन्तु कथन-II सही है।
- (2) दोनों कथन-I तथा कथन-II सत्य हैं।
- (3) कथन-I सत्य है परन्तु कथन-II असत्य है।
- (4) दोनों कथन-I तथा कथन-II असत्य हैं।

14. कथन : 1

यदि तीन बलों \bar{F}_1, \bar{F}_2 तथा \bar{F}_3 को एक त्रिभुज की तीन भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = -\bar{F}_3$, तो तीनों बल संगामी होते हैं तथा संतुलन की दशा को प्रदर्शित करते हैं।

कथन : II

तीन बलों \bar{F}_1, \bar{F}_2 तथा \bar{F}_3 को इसी क्रम में भुजाओं के रूप में लेकर बने एक त्रिभुज से स्थानांतरीय संतुलन की दशा प्रदर्शित होती है।

उपर्युक्त कथनों के अवलोकन में नीचे दिए गये विकल्पों से उपयुक्त उत्तर चुनिए :

- (1) कथन-I असत्य है परन्तु कथन-II सत्य है।
- (2) कथन-I सत्य है परन्तु कथन-II असत्य है।
- (3) दोनों कथन-I तथा कथन-II असत्य हैं।
- (4) दोनों कथन-I तथा कथन-II सत्य हैं।

SOLUTION**1. Official Ans. by NTA (2)**

Sol. $i = 20t + 8t^2$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \int dq = \int idt$$

$$\Rightarrow q = \int_0^{15} (20t + 8t^2) dt$$

$$q = \left(\frac{20t^2}{2} + \frac{8t^3}{3} \right)_0^{15}$$

$$q = 10 \times (15)^2 + \frac{8(15)^3}{3}$$

$$q = 2250 + 9000$$

$$q = 11250 \text{ C}$$

2. Official Ans. by NTA (2)

Sol. We know,

$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$$

By triangle law of vector addition, we can write
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}; \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}; \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}$$

Now

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH} \\ &= (7 \overrightarrow{AO}) + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} \\ &= (7 \overrightarrow{AO}) + \vec{0} - \overrightarrow{OA} \\ &= (7 \overrightarrow{AO}) + \overrightarrow{AO} \\ &= 8\overrightarrow{AO} = 8(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \\ &= 16\hat{i} + 24\hat{j} - 32\hat{k} \end{aligned}$$

3. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$AB\cos\theta = AB\sin\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos 45^\circ}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - \sqrt{2}AB}$$

Hence option (4).

4. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $|\vec{P}| = |\vec{Q}| = x \quad \dots(i)$

$$|\vec{P} + \vec{Q}| = n |\vec{P} - \vec{Q}|$$

$$\vec{P}^2 + \vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta = n^2(\vec{P}^2 + \vec{Q}^2 - 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta)$$

Using (i) in above equation

$$\cos\theta = \frac{n^2 - 1}{1 + n^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)$$

5. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } (A \cos\theta) \hat{B} = A \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \right) \hat{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{B} \hat{B}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}} \right) = \hat{i} + \hat{j}$$

6. Official Ans. by NTA (3)

$$\text{Sol. } \text{Direction of P } \hat{v}_1 = \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \pm \frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Direction of Q } \hat{v}_2 = \pm \frac{\vec{A} \times \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{C}|} = \pm \frac{2\hat{k}}{2} = \pm \hat{k}$$

Angle between \hat{v}_1 and \hat{v}_2

$$\frac{\hat{v}_1 \cdot \hat{v}_2}{|\hat{v}_1| |\hat{v}_2|} = \frac{\pm 1 / \sqrt{3}}{(1)(1)} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

7. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. (a) } \vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Option (iv)

$$\text{Sol. (b) } \vec{A} = \vec{B} + \vec{C} = \vec{C} + \vec{B}$$

Option (iii)

$$\text{Sol. (c) } \vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$$

Option (i)

$$\text{Sol. (d) } \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$$

Option (ii)

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Given $X = Y$

$$\begin{aligned} &\sqrt{X^2 + Y^2 - 2 \times Y \cos \theta} \\ &= n \sqrt{X^2 + Y^2 + 2 \times Y \cos \theta} \end{aligned}$$

Square both sides

$$2X^2(1 - \cos \theta) = n^2 \cdot 2X^2(1 + \cos \theta)$$

$$1 - \cos \theta = n^2 + n^2 \cos \theta$$

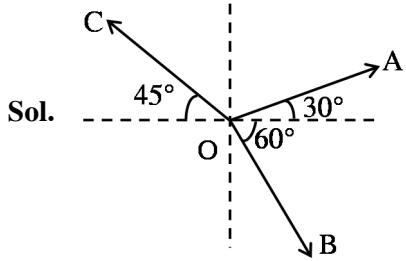
$$\cos \theta = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{n^2 - 1}{-n^2 - 1} \right]$$

9. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Polygon law is applicable in both but the equation given in the reason is not useful in explaining the assertion.

10. Official Ans. by NTA (1)



Let magnitude be equal to λ .

$$\overrightarrow{OA} = \lambda \left[\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j} \right] = \lambda \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + \frac{1}{2} \hat{j} \right]$$

$$\overrightarrow{OB} = \lambda \left[\cos 60^\circ \hat{i} - \sin 60^\circ \hat{j} \right] = \lambda \left[\frac{1}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \right]$$

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \left[\cos 45^\circ (-\hat{i}) + \sin 45^\circ \hat{j} \right] = \lambda \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \right]$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \lambda \left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$$

\therefore Angle with x-axis

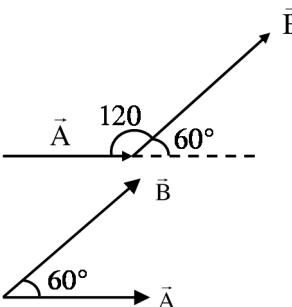
$$\tan^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2}{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2} \right]$$

$$= \tan^{-1} \left[\frac{1 - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}} \right]$$

Hence option (1)

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



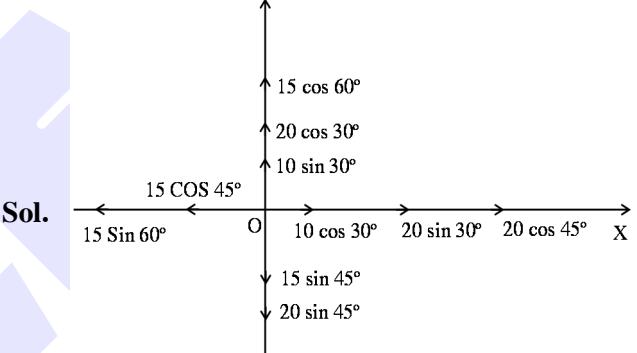
Angle between \vec{A} and \vec{B} , $\theta = 60^\circ$

Angle between \vec{A} and $\vec{A} - \vec{B}$

$$\tan \alpha = \frac{B \sin \theta}{A - B \cos \theta} = \frac{B \frac{\sqrt{3}}{2}}{A - B \times \frac{1}{2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}B}{2A - B} \quad \text{Ans 3}$$

12. Official Ans. by NTA (1)



$$\vec{F}_x = \left(10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \left(\frac{1}{2} \right) + 20 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 15 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 15 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \hat{i}$$

$$= 9.25 \hat{i}$$

$$\vec{F}_y = \left(15 \left(\frac{1}{2} \right) + 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 10 \left(\frac{1}{2} \right) - 15 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 20 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \hat{j}$$

$$= 5 \hat{j}$$

13. Official Ans. by NTA (2)

$$\vec{A} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\vec{B} = \vec{P} - \vec{Q} \quad \vec{P} \perp \vec{Q}$$

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2(P^2 + Q^2)(1 + \cos \theta)}$$

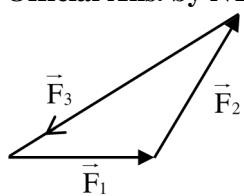
$$\text{For } |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3(P^2 + Q^2)}$$

$$\theta_1 = 60^\circ$$

$$\text{For } |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2(P^2 + Q^2)}$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

14. Official Ans. by NTA (4)

Sol.

$$\text{Here } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

Since $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ (equilibrium)

Both statements correct