

SEQUENCE & PROGRESSION

- 1.** यदि श्रेणी $\log_{9^{1/2}} x + \log_{9^{1/3}} x + \log_{9^{1/4}} x + \dots, x > 0$ के प्रथम 21 पदों का योग 504 है, तो x बराबर है:
 (1) 243 (2) 9 (3) 7 (4) 81
- 2.** माना $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ एक अनुक्रम है, जिसके लिए $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ तथा $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \forall n \geq 1$ हैं। तो $47 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{3n}}$ बराबर है _____।
- 3.** माना एक समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग S_n है। यदि $S_{10} = 530$ तथा $S_5 = 140$ है, तो $S_{20} - S_6$ बराबर है –
 (1) 1862 (2) 1842 (3) 1852 (4) 1872
- 4.** समुच्चय $\{n \in \{1, 2, \dots, 100\} | n$ तथा 2040 का महत्तम समापवर्तक 1 है} के सभी अवयवों का योग बराबर है _____।
- 5.** माना एक समान्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल S_n है। यदि $S_{3n} = 3S_{2n}$ है, तो $\frac{S_{4n}}{S_{2n}}$ बराबर है:
 (1) 6 (2) 4 (3) 2 (4) 8
- 6.** यदि $\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \dots \infty \text{ तक}\right)^{\log_{(0.25)}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \infty \text{ तक}\right)}$ का मान l है, तो l^2 बराबर है _____।
- 7.** यदि $\log_3 2, \log_3(2^x - 5), \log_3\left(2^x - \frac{7}{2}\right)$ एक समांतर श्रेणी में है, तो x का मान बराबर है _____।
- 8.** माना $A = \{n \in \mathbb{N} | n^2 \leq n + 10,000\}, B = \{3k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ तथा $C = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ हैं, तो समुच्चय $A \cap (B - C)$ के सभी अवयवों का योगफल बराबर है _____।

- 9.** श्रेणी $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{2^2}{x^4+1} + \dots + \frac{2^{100}}{x^{2^{100}}+1}$ का योग, जब $x = 2$ है, है :
 (1) $1 + \frac{2^{101}}{4^{101}-1}$ (2) $1 + \frac{2^{100}}{4^{101}-1}$
 (3) $1 - \frac{2^{100}}{4^{100}-1}$ (4) $1 - \frac{2^{101}}{4^{101}-1}$
- 10.** एक अनन्त GP a, ar, ar^2, ar^3, \dots का योग 15 है तथा इसके प्रत्येक पद का वर्ग करने का योग 150 है, तो ar^2, ar^4, ar^6, \dots का योग है।
 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{25}{2}$ (4) $\frac{9}{2}$
- 11.** माना a_1, a_2, \dots, a_{10} एक AP है, जिसका सार्वअंतर -3 है तथा b_1, b_2, \dots, b_{10} एक GP है, जिसका सार्व अनुपात 2 है। माना $c_k = a_k + b_k, k = 1, 2, \dots, 10$ है। यदि $c_2 = 12$ तथा $c_3 = 13$ है, तो $\sum_{k=1}^{10} c_k$ बराबर है _____।
- 12.** यदि $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$, के लिए
 $y = \log_{10}x + \log_{10}x^{1/3} + \log_{10}x^{1/9} + \dots$ अनन्त पदों तक तथा $\frac{2+4+6+\dots+2y}{3+6+9+\dots+3y} = \frac{4}{\log_{10}x}$ है, तो क्रमित युग्म (x, y) बराबर है:
 (1) $(10^6, 6)$ (2) $(10^4, 6)$
 (3) $(10^2, 3)$ (4) $(10^6, 9)$
- 13.** श्रेणी $\frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \dots$ के 10 पदों का योग है :
 (1) 1 (2) $\frac{120}{121}$ (3) $\frac{99}{100}$ (4) $\frac{143}{144}$
- 14.** तीन संख्याएँ एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी, जिसका सार्व अनुपात r है, में है। यदि बीच की संख्या को दुगुना कर दिया जाये, तो नयी संख्याएँ एक समान्तर श्रेणी, जिसका सार्वअंतर d है, में हैं। यदि गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद $3r^2$ है, तो $r^2 - d$ बराबर है :
 (1) $7 - 7\sqrt{3}$ (2) $7 + \sqrt{3}$
 (3) $7 - \sqrt{3}$ (4) $7 + 3\sqrt{3}$

15. 10 संख्याओं $7 \times 8, 10 \times 10, 13 \times 12, 16 \times 14, \dots$ का माध्य है _____.
16. माना a_1, a_2, a_3, \dots एक A.P. है। यदि $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{a_1 + a_2 + \dots + a_p} = \frac{100}{p^2}$, $p \neq 10$ है, तो $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ बराबर है :
- (1) $\frac{19}{21}$ (2) $\frac{100}{121}$ (3) $\frac{21}{19}$ (4) $\frac{121}{100}$
17. 4-अंकों की संख्याएँ, जो न तो 7 की गुणज हैं न ही 3 की गुणज हैं, की संख्या है _____।
18. यदि $S = \frac{7}{5} + \frac{9}{5^2} + \frac{13}{5^3} + \frac{19}{5^4} + \dots$ है, तो 160 S बराबर है _____।
19. माना $S_n = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \dots + (n-1) \cdot 1$, $n \geq 4$ है तो $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{2S_n}{n!} - \frac{1}{(n-2)!} \right)$ बराबर है :
- (1) $\frac{e-1}{3}$ (2) $\frac{e-2}{6}$ (3) $\frac{e}{3}$ (4) $\frac{e}{6}$
20. माना a_1, a_2, \dots, a_{21} समांतर श्रेढ़ी में इस प्रकार हैं कि $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{9}$ है। यदि इस समांतर श्रेढ़ी का योगफल 189 है, तब $a_6 a_{16}$ बराबर है :
- (1) 57 (2) 72 (3) 48 (4) 36
21. माना a, b, c एक समान्तर श्रेढ़ी में हैं। माना त्रिभुज जिसके शीर्ष विन्दु $(a, c), (2, b)$ तथा (a, b) है, का केन्द्रक $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ है। यदि समीकरण, $ax^2 + bx + 1 = 0$ के मूल α तथा β हैं, तो $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ का मान है :
- (1) $\frac{71}{256}$ (2) $\frac{69}{256}$
 (3) $-\frac{69}{256}$ (4) $-\frac{71}{256}$

22. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के पहले चार पदों का योग $\frac{65}{12}$ है तथा उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{65}{18}$ है। यदि इसके पहले तीन पदों का गुणनफल 1 हो और तीसरा पद α हो, तो 2α बराबर है _____।
23. यदि $0 < \theta, \phi < \frac{\pi}{2}$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta, y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} \phi$, तथा $z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta \cdot \sin^{2n} \phi$ हैं तो :
- (1) $xy - z = (x + y)z$ (2) $xy + yz + zx = z$
 (3) $xyz = 4$ (4) $xy + z = (x + y)z$
24. माना A_1, A_2, A_3, \dots वर्ग हैं जबकि प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, A_n की भुजा की लम्बाई, A_{n+1} के विकर्ण की लम्बाई के बराबर है। यदि A_1 की भुजा की लम्बाई 12 cm है, तो n का न्यूनतम मान, जिसके लिए A_n का क्षेत्रफल एक से कम है, है _____।
25. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 6n + 10}{(2n+1)!}$ का योगफल बराबर है :
- (1) $\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} - 10$
 (2) $\frac{41}{8}e - \frac{19}{8}e^{-1} - 10$
 (3) $\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} + 10$
 (4) $-\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} - 10$
26. यदि अनुक्रम $-16, 8, -4, 2, \dots$ के $p^{\text{वे}}$ तथा $q^{\text{वे}}$ पदों के समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य, समीकरण $4x^2 - 9x + 5 = 0$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो $p + q$ बराबर है _____.
27. एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी में, दूसरे तथा छठे पदों का योगफल $\frac{25}{2}$ है और तीसरे तथा पाँचवें पदों का गुणनफल 25 है, तो चौथे, छठे तथा आठवें पदों का योगफल है:
- (1) 30 (2) 26 (3) 35 (4) 32

28. अनन्त श्रेणी $1 + \frac{2}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \frac{17}{3^4} + \frac{22}{3^5} + \dots$ का योग बराबर है :
- (1) $\frac{13}{4}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{15}{4}$ (4) $\frac{11}{4}$
29. माना $\frac{1}{16}, a$ तथा b G.P. में हैं तथा $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 6$ A.P. में हैं, जहाँ $a, b > 0$ हैं। तो $72(a+b)$ बराबर है _____।
30. माना $S_n(x) = \log_{a^{1/2}} x + \log_{a^{1/3}} x + \log_{a^{1/6}} x + \log_{a^{1/11}} x + \log_{a^{1/18}} x + \log_{a^{1/27}} x + \dots n$ पदों तक, जहाँ $a > 1$ है। यदि $S_{24}(x) = 1093$ तथा $S_{12}(2x) = 265$ हैं, तो a का मान बराबर है _____।
31. एक समान्तर श्रेढ़ी तथा एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के पहले चार पद समुच्चय $\{11, 8, 21, 16, 26, 32, 4\}$ में से हैं। यदि इन श्रेढ़ियों के अंतिम पद चार अंकों की अधिकतम सम्भव संख्यायें हैं, तो इन दोनों श्रेढ़ियों में होने वाले पदों की संख्या है _____.
32. यदि एक वास्तविक संख्या x के लिए $1, \log_{10}(4^x - 2)$ तथा $\log_{10}\left(4^x + \frac{18}{5}\right)$ एक समान्तर श्रेढ़ी में हैं, तो सारणिक
- | | | |
|---------------------------------|---------|-------|
| $2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ | $x - 1$ | x^2 |
| 1 | 0 | x |
| x | 1 | 0 |
- का मान बराबर है.....।

33. यदि α, β धन पूर्णांक हैं, जिनके लिए $100^\alpha - 199\beta = (100)(100) + (99)(101) + (98)(102) + \dots + (1)(199)$ है, तो (α, β) तथा मूलबिंदु से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता है :
- (1) 540 (2) 550 (3) 530 (4) 510
34. $\frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + \frac{1}{7^2 - 1} + \dots + \frac{1}{(201)^2 - 1}$ बराबर है :
- (1) $\frac{101}{404}$ (2) $\frac{25}{101}$ (3) $\frac{101}{408}$ (4) $\frac{99}{400}$
35. माना एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम $2n$ पदों का योगफल S_1 है। माना उसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम $4n$ पदों का योगफल S_2 है। यदि $(S_2 - S_1) = 1000$ है, तो इस समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम $6n$ पदों का योग बराबर है:
- (1) 1000 (2) 7000 (3) 5000 (4) 3000
36. $\left[\frac{x+1}{x^{2/3} - x^{1/3} + 1} - \frac{x-1}{x - x^{1/2}} \right]^{10}$, $x \neq 1$, के प्रसार में x से स्वतंत्र पद बराबर है _____।

SOLUTION

1. $s = 2\log_9 x + 3 \log_9 x + \dots + 22 \log_9 x$
 $s = \log_9 x (2 + 3 + \dots + 22)$

$$s = \log_9 x \left\{ \frac{21}{2} (2+22) \right\}$$

$$\text{Given } 252 \log_9 x = 504$$

$$\Rightarrow \log_9 x = 2 \Rightarrow x = 81$$

2. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, let $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{8^n} = P$

Divide by 8^n we get

$$\frac{a_{n+2}}{8^n} = \frac{2a_{n+1}}{8^n} + \frac{a_n}{8^n}$$

$$\Rightarrow 64 \frac{a_{n+2}}{8^{n+2}} = \frac{16a_{n+1}}{8^{n+1}} + \frac{a_n}{8^n}$$

$$64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{8^{n+2}} = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{8^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{8^n}$$

$$64 \left(P - \frac{a_1}{8} - \frac{a_2}{8^2} \right) = 16 \left(P - \frac{a_1}{8} \right) + P$$

$$\Rightarrow 64 \left(P - \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \right) = 16 \left(P - \frac{1}{8} \right) + P$$

$$64P - 8 - 1 = 16P - 2 + P$$

$$47P = 7$$

3. $S_{10} = 530 \Rightarrow \frac{10}{2} \{2a + 9d\} = 530$

$$\Rightarrow 2a + 9d = 106 \dots(1)$$

$$\text{and } S_5 = 140 \Rightarrow \frac{5}{2} \{2a + 4d\} = 140$$

$$\Rightarrow 2a + 4d = 56 \dots(2)$$

$$\Rightarrow 5d = 50 \Rightarrow [d = 10] \Rightarrow [a = 8]$$

$$\text{Now, } S_{20} - S_6 = \frac{20}{2} \{2a + 19d\} - \frac{6}{2} \{2a + 5d\}$$

$$= 14a + 175d$$

$$= (14 \times 8) + (175 \times 10)$$

$$= 1862$$

4. $2040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$
n should not be multiple of 2, 3, 5 and 17.
Sum of all n = $(1 + 3 + 5 + \dots + 99) - (3 + 9 + 15 + 21 + \dots + 99) - (5 + 25 + 35 + 55 + 65 + 85 + 95) - (17)$
 $= 2500 - \frac{17}{2}(3+99) - 365 - 17$
 $= 2500 - 867 - 365 - 17$
 $= 1251$

5. Let a be first term and d be common diff. of this A.P.

Given $S_{3n} = 3S_{2n}$

$$\Rightarrow \frac{3n}{2} [2a + (3n-1)d] = 3 \frac{2n}{2} [2a + (2n-1)d]$$

$$\Rightarrow 2a + (3n-1)d = 4a + (4n-2)d$$

$$\Rightarrow 2a + (n-1)d = 0$$

$$\text{Now } \frac{S_{4n}}{S_{2n}} = \frac{\frac{4n}{2} [2a + (4n-1)d]}{\frac{2n}{2} [2a + (2n-1)d]} = \frac{2 \left[\underbrace{2a + (n-1)d}_{=0} + 3nd \right]}{\left[\underbrace{2a + (n-1)d}_{=0} + nd \right]}$$

$$= \frac{6nd}{nd} = 6$$

6. $\ell = \left(1 + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \dots}_S \right)^{\log_{0.25} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)}$

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{10}{3^3} + \dots$$

$$\frac{S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \dots$$

— — — —

$$\frac{2S}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots$$

$$\frac{2S}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots$$

$$S = \frac{3}{2} \left(\frac{4/3}{1-1/3} \right) = 3$$

$$\text{Now } \ell = \left(3 \right)^{\log_{0.25} \left(\frac{1/3}{1-1/3} \right)}$$

$$\ell = 3^{\log_{(1/4)} \left(\frac{1}{2} \right)} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ell^2 = 3$$

7. $2\log_3(2^x - 5) = \log_3 2 + \log_3\left(2^x - \frac{7}{2}\right)$

Let $2^x = t$

$$\log_3(t-5)^2 = \log_3 2\left(t - \frac{7}{2}\right)$$

$$(t-5)^2 = 2t - 7$$

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

$$(t-4)(t-8) = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = 4 \text{ or } 2^x = 8$$

$X = 2$ (Rejected)

Or $x = 3$

8. $B - C \equiv \{7, 13, 19, \dots, 97, \dots\}$

Now, $n^2 - n \leq 100 \times 100$

$$\Rightarrow n(n-1) \leq 100 \times 100$$

$$\Rightarrow A = \{1, 2, \dots, 100\}.$$

So, $A \cap (B - C) = \{7, 13, 19, \dots, 97\}$

Hence, sum = $\frac{16}{2}(7 + 97) = 832$

9. $S = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{2^2}{x^4+1} + \dots + \frac{2^{100}}{x^{2^{100}}+1}$

$$S + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \dots$$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \dots$$

$$S + \frac{1}{1-x} = \frac{2^{101}}{1-x^{2^{101}}}$$

Put $x = 2$

$$S = 1 - \frac{2^{101}}{2^{2^{101}} - 1}$$

Not in option (BONUS)

10. Sum of infinite terms :

$$\frac{a}{1-r} = 15 \quad \dots\dots (i)$$

Series formed by square of terms:

$$a^2, a^2r^2, a^2r^4, a^2r^6, \dots$$

$$\text{Sum} = \frac{a^2}{1-r^2} = 150$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1-r} \cdot \frac{a}{1+r} = 150 \Rightarrow 15 \cdot \frac{a}{1+r} = 150$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+r} = 10 \quad \dots\dots (ii)$$

$$\text{by (i) and (ii)} a = 12; r = \frac{1}{5}$$

Now series : ar^2, ar^4, ar^6

$$\text{Sum} = \frac{ar^2}{1-r^2} = \frac{12 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{1}{2}$$

11. $c_2 = a_2 + b_2 = a_1 - 3 + 2b_1 = 12$

$$a_1 + 2b_1 = 15 \quad \dots\dots (1)$$

$$c_3 = a_3 + b_3 = a_1 - 6 + 4b_1 = 13$$

$$a_1 + 4b_1 = 19 \quad \dots\dots (2)$$

from (1) & (2) $b_1 = 2, a_1 = 11$

$$\sum_{k=1}^{10} c_k = \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= \frac{10}{2}(2 \times 11 + 9 \times (-3)) + \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 5(22 - 27) + 2(1023)$$

$$= 2046 - 25 = 2021$$

$$\frac{2(1+2+3+\dots+y)}{3(1+2+3+\dots+y)} = \frac{4}{\log_{10} x}$$

$$\Rightarrow \log_{10} x = 6 \Rightarrow x = 10^6$$

Now,

$$y = \left(\log_{10} x\right) + \left(\log_{10} x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(\log_{10} x^{\frac{1}{9}}\right) + \dots + \infty$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \infty\right) \log_{10} x$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right) \log_{10} x = 9$$

$$\text{So, } (x, y) = (10^6, 9)$$

13. $S = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \times 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \times 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \times 4^2} + \dots$
 $= \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right] + \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right] + \left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right] + \dots + \left[\frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} \right]$
 $= 1 - \frac{1}{121}$
 $= \frac{120}{121}$

14. Let numbers be $\frac{a}{r}, a, ar \rightarrow G.P$
 $\frac{a}{r}, 2a, ar \rightarrow A.P \Rightarrow 4a = \frac{a}{r} + ar \Rightarrow r + \frac{1}{r} = 4$
 $r = 2 \pm \sqrt{3}$
 $4^{\text{th}} \text{ form of G.P} = 3r^2 \Rightarrow ar^2 = 3r^2 \Rightarrow a = 3$
 $r = 2 + \sqrt{3}, a = 3, d = 2a - \frac{a}{r} = 3\sqrt{3}$
 $r^2 - d = (2 + \sqrt{3})^2 - 3\sqrt{3}$
 $= 7 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$
 $= 7 + \sqrt{3}$

15. $7 \times 8, 10 \times 10, 13 \times 12, 16 \times 14 \dots$
 $T_n = (3n + 4)(2n + 6) = 2(3n + 4)(n + 3)$
 $= 2(3n^2 + 13n + 12) = 6n^2 + 26n + 24$
 $S_{10} = \sum_{n=1}^{10} T_n = 6 \sum_{n=1}^{10} n^2 + 26 \sum_{n=1}^{10} n + 24 \sum_{n=1}^{10} 1$
 $= \frac{6(10 \times 11 \times 21)}{6} + 26 \times \frac{10 \times 11}{2} + 24 \times 10$
 $= 10 \times 11 (21 + 13) + 240$
 $= 3980$

Mean = $\frac{S_{10}}{10} = \frac{3980}{10} = 398$

16. $\frac{\frac{10}{2}(2a_1 + 9d)}{\frac{p}{2}(2a_1 + (p-1)d)} = \frac{100}{p^2}$
 $(2a_1 + 9d)p = 10(2a_1 + (p-1)d)$
 $9dp = 20a_1 - 2pa_1 + 10d(p-1)$

$9p = (20 - 2p) \frac{a_1}{d} + 10(p-1)$

$\frac{a_1}{d} = \frac{(10-p)}{2(10-p)} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{a_1 + 10d}{a_1 + 9d} = \frac{\frac{1}{2} + 10}{\frac{1}{2} + 9} = \frac{21}{19}$

17. A = 4-digit numbers divisible by 3

A = 1002, 1005, ..., 9999.

$$9999 = 1002 + (n-1)3$$

$$\Rightarrow (n-1)3 = 8997 \Rightarrow n = 3000$$

B = 4-digit numbers divisible by 7

B = 1001, 1008, ..., 9996

$$\Rightarrow 9996 = 1001 + (n-1)7$$

$$\Rightarrow n = 1286$$

A ∩ B = 1008, 1029, ..., 9996

$$9996 = 1008 + (n-1)21$$

$$\Rightarrow n = 429$$

So, no divisible by either 3 or 7

$$= 3000 + 1286 - 429 = 3857$$

total 4-digits numbers = 9000

required numbers = 9000 - 3857 = 5143

18. $S = \frac{7}{5} + \frac{9}{5^2} + \frac{13}{5^3} + \frac{19}{5^4} + \dots$

$$\frac{1}{5}S = \frac{7}{5^2} + \frac{9}{5^3} + \frac{13}{5^4} + \dots$$

On subtracting

$$\frac{4}{5}S = \frac{7}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{6}{5^4} + \dots$$

$$S = \frac{7}{4} + \frac{1}{10} \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots \right)$$

$$S = \frac{7}{4} + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{5} \right)^{-2}$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{25}{16} = \frac{61}{32}$$

$$\Rightarrow 160S = 5 \times 61 = 305$$

19. Let $T_r = r(n - r)$

$$T_r = nr - r^2$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{r=1}^n T_r = \sum_{r=1}^n (nr - r^2)$$

$$S_n = \frac{n(n)(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$\text{Now } \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{2S_n}{n!} - \frac{1}{(n-2)!} \right)$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{n(n-1)(n+1)}{6 \cdot n(n-1)(n-2)!} - \frac{1}{(n-2)!} \right)$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{n-2+3}{(n-2)!} \right) - \frac{1}{(n-2)!} \right)$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(n-3)!} = \frac{1}{3}(e-1)$$

Option (1)

$$20. \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n (a_n + d)}$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + d} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{21}} \right) = \frac{4}{9} \quad (\text{Given})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} \left(\frac{a_{21} - a_1}{a_1 a_{21}} \right) = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d} \left(\frac{a_1 + 20d - a_1}{a_1 a_2} \right) = \frac{4}{9} \Rightarrow a_1 a_2 = 45 \dots (1)$$

$$\text{Now sum of first 21 terms} = \frac{21}{2} (2a_1 + 20d) = 189$$

$$\Rightarrow a_1 + 10d = 9 \dots (2)$$

For equation (1) & (2) we get

$$a_1 = 3 \text{ & } d = \frac{3}{5}$$

OR

$$a_1 = 15 \text{ & } d = -\frac{3}{5}$$

$$\text{So, } a_6 \cdot a_{16} = (a_1 + 5d)(a_1 + 15d)$$

$$\Rightarrow a_6 a_{16} = 72$$

Option (2)

$$21. \frac{a+2+a}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a = 4$$

$$\text{and } \frac{c+b+b}{3} = \frac{7}{3}$$

$$c + 2b = 7$$

$$\text{also } 2b = a + c$$

$$2b - a + 2b = 7$$

$$b = \frac{11}{4}$$

$$\text{now } 4x^2 + \frac{11}{4}x + 1 = 0 \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{-11}{16} \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{121}{256} - \frac{3}{4} = \frac{-71}{256}$$

22. Let number are a, ar, ar^2, ar^3

$$a \frac{(r^4 - 1)}{r - 1} = \frac{65}{12} \dots (1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\left(\frac{1}{r^4} - 1 \right)}{\frac{1}{r} - 1} = \frac{65}{18}$$

$$\frac{1}{ar^3} \left(\frac{1 - r^3}{1 - r} \right) = \frac{65}{18} \dots (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow a^2 r^3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{and } a^3 \cdot r^3 = 1$$

$$ar = 1$$

$$(ar)^2 \cdot r = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{3}{2}, a = \frac{2}{3}$$

So, third term = $ar^2 = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$

$$\alpha = \frac{3}{2}$$

$$2\alpha = 3$$

23. $x = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{x}$

Also, $\cos^2 \theta = \frac{1}{y}$ & $1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{z}$

So, $1 - \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow z(xy - 1) = xy \dots(1)$

Also, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow x + y = xy \dots(2)$

From (i) and (ii)

$$xy + z = xyz = (x + y)z$$

24. Let a_n be the side length of A_n .

So, $a_n = \sqrt{2}a_{n+1}, a_1 = 12$

$$\Rightarrow a_n = 12 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

Now, $\Rightarrow (a_n)^2 < 1 \Rightarrow \frac{144}{2^{(n-1)}} < 1$

$$\Rightarrow 2^{(n-1)} > 144$$

$$\Rightarrow n - 1 \geq 8$$

$$\Rightarrow n \geq 9$$

25. $T_n = \frac{n^2 + 6n + 10}{(2n+1)!} = \frac{4n^2 + 24n + 40}{4 \cdot (2n+1)!}$

$$= \frac{(2n+1)^2 + 20n + 39}{4 \cdot (2n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)^2 + (2n+1) \cdot 10 + 29}{4(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n)!} + \frac{(2n+1)10}{(2n+1)(2n)!} + \frac{29}{(2n+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{2n+1}{(2n)!} + \frac{10}{(2n)!} + \frac{29}{(2n+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(2n-1)!} + \frac{11}{(2n)!} + \frac{29}{(2n+1)!} \right]$$

$$S_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$S_2 = 11 \left[\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots \right] = 11 \left[\frac{e + \frac{1}{e} - 2}{2} \right]$$

$$S_3 = 29 \left[\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots \right] = 29 \left[\frac{e - \frac{1}{e} - 2}{2} \right]$$

$$\text{Now, } S = \frac{1}{4} [S_1 + S_2 + S_3]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{11e}{2} + \frac{11}{2e} + \frac{29e}{2} - \frac{29}{2e} - 4 \right]$$

$$= \frac{41e}{8} - \frac{19}{8e} - 10$$

26. $4x^2 - 9x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{5}{4}$

Now given $\frac{5}{4} = \frac{t_p + t_q}{2}, t = t_p t_q$ where

$$t_r = -16 \left(-\frac{1}{2} \right)^{r-1}$$

$$\text{so } \frac{5}{4} = -8 \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{p-1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{q-1} \right]$$

$$1 = 256 \left(-\frac{1}{2} \right)^{p+q-2} \Rightarrow 2^{p+q-2} = (-1)^{p+q-2} 2^8$$

hence $p + q = 10$

27. a, ar, ar^2, \dots

$$T_2 + T_6 = \frac{25}{2} \Rightarrow ar(1 + r^4) = \frac{25}{2}$$

$$a^2 r^2 (1 + r^4)^2 = \frac{625}{4} \quad \dots (1)$$

$$T_3 \cdot T_5 = 25 \Rightarrow (ar^2)(ar^4) = 25$$

$$a^2 r^6 = 25 \quad \dots (2)$$

On dividing (1) by (2)

$$\frac{(1+r^4)^2}{r^4} = \frac{25}{4}$$

$$4r^8 - 17r^4 + 4 = 0$$

$$(4r^4 - 1)(r^4 - 4) = 0$$

$$r^4 = \frac{1}{4}, 4 \Rightarrow r^4 = 4$$

(an increasing geometric series)

$$a^2 r^6 = 25 \Rightarrow (ar^3)^2 = 25$$

$$T_4 + T_6 + T_8 = ar^3 + ar^5 + ar^7$$

$$= ar^3 (1 + r^2 + r^4)$$

$$= 5(1 + 2 + 4) = 35$$

$$28. S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \frac{17}{3^4} + \dots$$

$$\frac{S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{12}{3^4} + \dots$$

$$\frac{2S}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \text{up to infinite terms}$$

$$\Rightarrow S = \frac{13}{4}$$

$$29. a^2 = \frac{b}{16} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{16a^2}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + 6$$

$$\frac{1}{8a^2} = \frac{1}{a} + 6$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{8}{a} - 48 = 0$$

$$\frac{1}{a} = 12, -4 \Rightarrow a = \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}$$

$$a = \frac{1}{12}, a > 0$$

$$b = 16a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 72(a+b) = 6+8=14$$

$$30. S_n(x) = (2+3+6+11+18+27+\dots+n\text{-terms})\log_a x$$

$$\text{Let } S_1 = 2 + 3 + 6 + 11 + 18 + 27 + \dots + T_n$$

$$S_1 = 2 + 3 + 6 + \dots + T_n$$

$$T_n = 2 + 1 + 3 + 5 + \dots + n \text{ terms}$$

$$T_n = 2 + (n-1)^2$$

$$S_1 = \sum T_n = 2n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\Rightarrow S_n(x) = \left(2n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right) \log_a x$$

$$S_{24}(x) = 1093 \text{ (Given)}$$

$$\log_a x \left(48 + \frac{23.24.47}{6} \right) = 1093$$

$$\log_a x = \frac{1}{4} \dots (1)$$

$$S_{12}(2x) = 265$$

$$S_{12}(2x) = 265$$

$$\log_a(2x) \left(24 + \frac{11.12.23}{6} \right) = 265$$

$$\log_a 2x = \frac{1}{2} \dots (2)$$

$$(2) - (1)$$

$$\log_a 2x - \log_a x = \frac{1}{4}$$

$$\log_a 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 16$$

$$31. \text{ GP : } 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,$$

$$2048, 4096, 8192$$

$$\text{AP : } 11, 16, 21, 26, 31, 36$$

Common terms : 16, 256, 4096 only

$$32. 2 \log_{10}(4^x - 2) = 1 + \log_{10} \left(4^x + \frac{18}{5} \right)$$

$$(4^x - 2)^2 = 10 \left(4^x + \frac{18}{5} \right)$$

$$(4^x)^2 + 4 - 4(4^x) - 32 = 0$$

$$(4^x - 16)(4^x + 2) = 0$$

$$4^x = 16$$

$$x = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1(0 - 4) + 4(1)$$

$$= -6 + 4 + 4 = 2$$

33. $S = (100)(100) + (99)(101) + (98)(102) \dots \dots \dots$
 $(2)(198) + (1)(199)$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x=0}^{99} (100-x)(100+x) = \sum 100^2 - x^2 \\ &= 100^3 - \frac{99 \times 100 \times 199}{6} \\ \alpha &= 3 \quad \beta = 1650 \\ \text{slope} &= \frac{1650}{3} = 550 \end{aligned}$$

34. $T_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} \frac{1}{(2n+2)2n} = \frac{1}{4(n)(n+1)}$
 $= \frac{(n+1)-n}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
 $S = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{100}{101} \right) = \frac{25}{101}$

35. $S_{2n} = \frac{2n}{2} [2a + (2n-1)d], S_{4n} = \frac{4n}{2} [2a + (4n-1)d]$
 $\Rightarrow S_2 - S_1 = \frac{4n}{2} [2a + (4n-1)d] - \frac{2n}{2} [2a + (2n-1)d]$
 $= 4an + (4n-1)2nd - 2na - (2n-1)dn$
 $= 2na + nd[8n-2-2n+1]$
 $\Rightarrow 2na + nd[6n-1] = 1000$
 $2a + (6n-1)d = \frac{1000}{n}$

$$\begin{aligned} \text{Now, } S_{6n} &= \frac{6n}{2} [2a + (6n-1)d] \\ &= 3n \cdot \frac{1000}{n} = 3000 \end{aligned}$$

36. $\left((x^{1/3} + 1) - \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) \right)^{10}$

$$(x^{1/3} - x^{-1/2})^{10}$$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r (x^{1/3})^{10-r} (-x^{-1/2})^r$$

$$\frac{10-r}{3} - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 2r - 3r = 0$$

$$\Rightarrow r = 4$$

$$T_5 = {}^{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$