AOD (MONOTONICITY)

1. माना $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 3x & , \quad x > 0 \\ 3xe^x & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तो निम्न में से किस अन्तराल में फलन f वर्धमान है ?

(1) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ (2) $(0, 2)$

(3) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ (4) $(-3, -1)$

2. माना : $f(x) = 3\sin^4 x + 10\sin^3 x + 6\sin^2 x - 3$, $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ है। तो f :

(1) $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है

(2) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है

(3) $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ में वर्धमान है

(4) $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ में ह्रासमान है

3. समीकरण $e^{4x} + 2e^{3x} - e^x - 6 = 0$ के वास्तविक मूलों की संख्या है:

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) 0

4. यदि 'a' का न्यूनतम मान, जिसके लिए फलन $f(x) = x^2 + ax + 1$, अंतराल $[1, 2]$ पर वर्धमान है, 'R' है तथा 'a' का अधिकतम मान, जिसके लिए फलन $f(x) = x^2 + ax + 1$ अंतराल $[1, 2]$, पर ह्यसमान है, तो $|R - S|$ का मान है _____.

5. माना कोई फलन f अंतराल $[0, 2]$ में संतत है तथा $(0, 2)$ में दो बार अवकलनीय है। यदि $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ तथा $f(2) = 2$, हैं, तो :

(1) सभी $x \in (0, 2)$ के लिए $f''(x) = 0$ है

(2) किसी $x \in (0, 2)$ के लिए $f''(x) = 0$ है

(3) किसी $x \in (0, 2)$ के लिए $f'(x) = 0$ है

(4) सभी $x \in (0, 2)$ के लिए $f''(x) > 0$ है

6. फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ ऐसा है कि $f(2) = f(4) = 0$ हैं। दो कथनों पर ध्यान दीजिए :

(S1) $x_1, x_2 \in (2, 4)$, $x_1 < x_2$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f'(x_1) = -1$ तथा $f'(x_2) = 0$ हैं।

(S2) $x_3, x_4 \in (2, 4)$, $x_3 < x_4$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $(2, x_4)$ में f ह्रासमान है, $(x_4, 4)$ में f वर्धमान है तथा $2f'(x_3) = \sqrt{3}\, f(x_4)$ है। तब :

(1) (S1) तथा (S2) दोनों सत्य है

(2) (S1) असत्य है तथा (S2) सत्य है

(3) (S1) तथा (S2) दोनों असत्य हैं

(4) (S1) सत्य है तथा (S2) असत्य है

7. माना $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -55x, & \text{यदि } x < -5 \\ 2x^3 - 3x^2 - 120x, & \text{यदि } -5 \le x \le 4 \\ 2x^3 - 3x^2 - 36x - 336, & \text{यदि } x > 4, \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। माना $A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R} : f \text{ वर्धमान है}\}$ तो A बराबर है :

(1) $(-\infty, -5) \cup (4, \infty)$ (2) $(-5, \infty)$

(3) $(-\infty, -5) \cup (-4, \infty)$ (4) $(-5, -4) \cup (4, \infty)$

8. फलन

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2}{6} - 2\sin x + (2x - 1)\cos x :$$

(1) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ में वर्धमान है

(2) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ में वर्धमान है

(3) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ में ह्रासमान है

(4) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ में ह्रासमान है

9. यदि $f'G\left(\frac{4}{3}\right)=0$, के साथ फलन $f(x) = x^3-ax^2+bx-4$, $x \in [1, 2]$ के लिए रोले का प्रमेय लागू होता है, तो क्रमित युग्म (a, b) बराबर है:

(1) (5, 8) (2) (–5, 8)

(3) (5, –8) (4) (–5, –8)

10. माना a एक पूर्णांक है जिसके लिए बहुपद $2x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10$ के सभी वास्तविक मूल अन्तराल (a, a + 1) में है। तो |a| बराबर है _____

11. माना R–{–1,1} पर परिभाषित एक वास्तविक मान फलन f

$$f(x) = 3\log_e\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2}{x-1}$$

द्वारा दिया गया है। तो फलन $f(x)$ निम्न में से किस अंतराल में वर्धमान है ?

(1) $(-\infty,-1)\cup\left(\left[\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}\right)$

(2) $(-\infty, \infty) - \{-1, 1\}$

(3) $\left(-1,\frac{1}{2}\right]$

(4) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]-\{-1\}$

12. $f(x)=\begin{cases}\left(2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R\to R$ का विचार कीजिए। फलन f:

(1) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ पर एकदिष्ट है

(2) $(-\infty, 0)$ तथा $(0, \infty)$ पर एकदिष्ट नहीं है

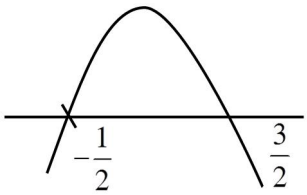
(3) केवल $(0, \infty)$ पर एकदिष्ट (monotonic) है

(4) केवल $(-\infty, 0)$ पर एकदिष्ट है

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f'(x)\begin{cases}-4x^2+4x+3 & x>0\\ 3e^x(1+x) & x\le 0\end{cases}$



For $x > 0$, $f'(x) = -4x^2 + 4x + 3$

f(x) is increasing in $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

For $x \le 0$, $f'(x) = 3e^x(1 + x)$

$f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (-1, 0)$

$\Rightarrow$ f(x) is increasing in $(-1, 0)$

So, in complete domain, f(x) is increasing in $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

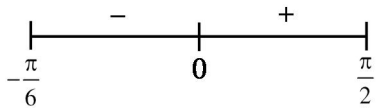
2. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x) = 3\sin^4x + 10\sin^3x + 6\sin^2x - 3,\ x \in \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(x) = 12\sin^3x\cos x + 30\sin^2x\cos x + 12\sin x\cos x$

$= 6\sin x\cos x\,(2\sin^2x + 5\sin x + 2)$

$= 6\sin x\cos x\,(2\sin x + 1)(\sin + 2)$



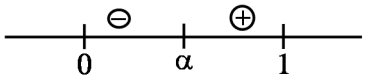
Decreasing in $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$

3. Official Ans. by NTA (3)

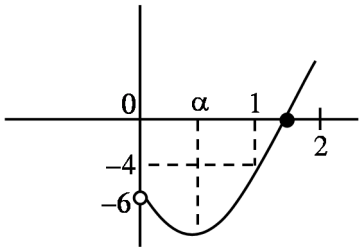
Sol. Let $e^x = t > 0$

$f(t) = t^4 + 2t^3 - t - 6 = 0$

$f'(t) = 4t^3 + 6t^2 - 1$



$f''(t) = 12t^2 + 12t > 0$



$f(0) = -6,\ f(1) = -4,\ f(2) = 24$

$\Rightarrow$ Number of real roots = 1

4. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x) = x^2 + ax + 1$

$f'(x) = 2x + a$

when $f(x)$ is increasing on [1, 2]

$2x + a \ge 0 \quad \forall\ x \in [1, 2]$

$a \ge -2x\ \forall\ x \in [1, 2]$

$R = -4$

when $f(x)$ is decreasing on [1, 2]

$2x + a \le 0\ \ \forall\ x \in [1, 2]$

$a \le -2\ \ \forall\ x \in [1, 2]$

$S = -2$

$|R - S| = |-4 + 2| = 2$

5. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(0) = 0 \quad f(1) = 1$ and $f(2) = 2$

Let $h(x) = f(x) - x$ has three roots

By Rolle's theorem $h'(x) = f'(x) - 1$ has at least two roots

$h''(x) = f''(x) = 0$ has at least one roots

6. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$

$f(2) = 8 - 24 + 2a + b = 0$

$2a + b = 16$ …(1)

$f(4) = 64 - 96 + 4a + b = 0$

$4a + b = 32$ …(2)

Solving (1) and (2)

$a = 8, b = 0$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$\Rightarrow f'(x)$ is $\uparrow$ for $x > 2$, and $f'(x)$ is $\downarrow$ for $x < 2$

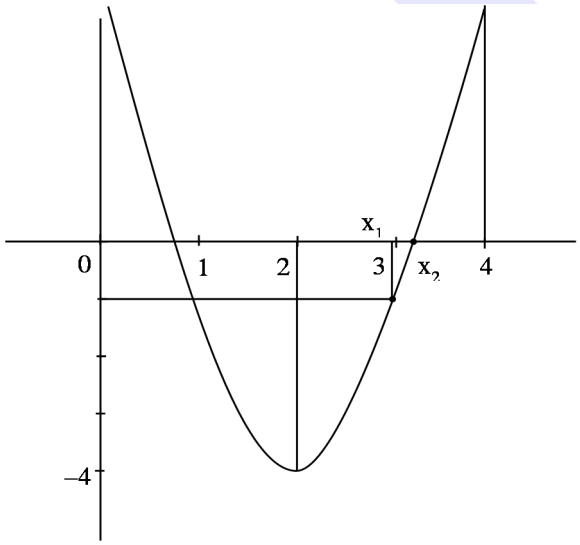
$f'(2) = 12 - 24 + 8 = -4$

$f'(4) = 48 - 48 + 8 = 8$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

vertex $(2, -4)$

$f'(2) = -4$, $f'(4) = 8$, $f'(3) = 27 - 36 + 8$



$f'(x_1) = -1$, then $x_1 = 3$

$f'(x_2) = 0$

Again $f'(x) < 0$ for $x \in (2, x_4)$

$f'(x) > 0$ for $x \in (x_4, 4)$

$x_4 \in (3, 4)$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$f(3) = 27 - 54 + 24 = -3$

$f(4) = 64 - 96 + 32 = 0$

For $x_4(3, 4)$

$f(x_4) < -3\sqrt{3}$

and $f'(x_3) > -4$

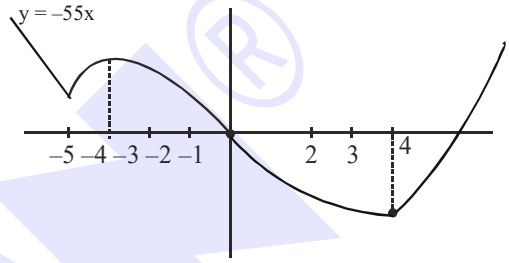
$2f'(x_3) > -8$

So, $2f'(x_3) = \sqrt{3}\ f(x_4)$

Correct Ans. (1)

7. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



$$f'(x) = \begin{cases} -55; & x < -5 \\ 6(x-5)(x+4); & -5 < x < 4 \\ 6(x-3)(x+2); & x > 4 \end{cases}$$

f(x) is increasing in

$x \in (-5, -4) \cup (4, \infty)$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = \dfrac{4x^3 - 3x^2}{6} - 2\sin x + (2x-1)\cos x$

$f'(x) = (2x^2 - x) - 2\cos x + 2\cos x - \sin x(2x-1)$

$= (2x - 1)(x - \sin x)$

for $x > 0$, $x - \sin x > 0$

$x < 0$, $x - \sin x < 0$

for $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$, $f'(x) \geq 0$

for $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$

$\Rightarrow f(x)$ increases in $\left[\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

9. Official Ans. by NTA (1)

Sol. f(1) = f(2)

$\Rightarrow 1 - a + b - 4 = 8 - 4a + 2b - 4$

$\Rightarrow 3a - b = 7$ .....(1)

Also $f^1\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ (given)

$\Rightarrow \left(3x^2 - 2ax + b\right)_{x=\frac{4}{3}} = 0$

$\Rightarrow \frac{16}{3} - \frac{8a}{3} + b = 0$

$\Rightarrow 8a - 3b - 16 = 0$ ....(2)

Solving (1) and (2)

a = 5, b = 8

10. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Let $2x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 10 = f(x)$

Now $f(-2) = -34$ and $f(-1) = 3$

Hence $f(x)$ has a root in $(-2,-1)$

Further $f'(x) = 10x^4 + 20x^3 + 20x^2 + 20x + 10$

$$= 10x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 20\right]$$

$$= 10x^2\left[\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2 + 17\right] > 0$$

Hence $f(x)$ has only one real root, so $|a| = 2$

11. Official Ans by NTA (1)

Sol. $f(x) = 3\ell n(x-1) - 3\ell n(x+1) - \frac{2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$f'(x) \geq 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup \left[\frac{1}{2},1\right) \cup (1,\infty)$

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $$f(x) = \begin{cases} -x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\left(2 - \sin\frac{1}{x}\right) - x\left(-\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) & x < 0 \\ \left(2 - \sin\frac{1}{x}\right) + x\left(-\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 + \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x < 0 \\ 2 - \sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ is an oscillating function which is non-monotonic in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Option (2)