

MAXIMA & MINIMA

1. माना 5 घात के एक बहुपद $f(x)$ के क्रांतिक बिन्दु

$x = \pm 1$ हैं। यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{f(x)}{x^3} \right) = 4$ है, तो निम्न में से कौन सा एक सत्य नहीं है?

- (1) f एक विषम फलन है।

(2) f का एक निम्ननिष्ठ बिन्दु $x = 1$ है तथा एक उच्चवर्ष बिन्दु $x = -1$ है।

(3) f का एक उच्चवर्ष बिन्दु $x = 1$ है तथा एक निम्ननिष्ठ बिन्दु $x = -1$ है।

(4) $f(1) - 4f(-1) = 4$

2. माना घात 3 का एक बहुपद $f(x)$ इस प्रकार है कि $f(-1) = 10$, $f(1) = -6$, $f(x)$ का एक क्रांतिक बिन्दु $x = -1$ है तथा $f'(x)$ का एक क्रांतिक बिन्दु $x = 1$ है। तो $f(x)$ का एक स्थानीय निम्ननिष्ठ है $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. माना एक फलन $f : [0, 5] \rightarrow \mathbf{R}$ संतत है, $f(1) = 3$ है

तथा F , $F(x) = \int\limits_1^x t^2 g(t) dt$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ

$g(t) = \int_1^t f(u) du$ है, तो फलन F के लिए, बिन्दु

$x = 1$ एक :

- (1) स्थानीय निम्ननिष्ठ बिन्दु है
 - (2) क्रांतिक बिन्दु नहीं है
 - (3) नति परिवर्तन (inflection) बिन्दु है
 - (4) स्थानीय उच्चवर्ष बिन्दु है

4. एक 10 cm त्रिज्या वाली गोलाकार लोहे की गेंद को बर्फ की एक समान मोटाई वाली परत से लेप किया गया है, जो कि $50 \text{ cm}^3/\text{min}$ की दर से पिघलती है। जब बर्फ की परत की मोटाई 5 cm है, उस समय बर्फ की मोटाई के घटने की दर (cm/min में), है :

- $$(1) \frac{1}{36\pi} \quad (2) \frac{5}{6\pi}$$

- $$(3) \frac{1}{18\pi} \quad (4) \frac{1}{54\pi}$$

5. माना $P(h, k)$ वक्र $y = x^2 + 7x + 2$ पर स्थित एक बिन्दु है, जो कि रेखा $y = 3x - 3$ के निकटतम है, तो बिन्दु P पर वक्र के अभिलंब का समीकरण है :

- $$\begin{array}{ll} (1) \ x + 3y - 62 = 0 & (2) \ x - 3y - 11 = 0 \\ (3) \ x - 3y + 22 = 0 & (4) \ x + 3y + 26 = 0 \end{array}$$

6. यदि $p(x)$ घात तीन का एक ऐसा बहुपद है, जिसका स्थानीय अधिकतम मान 8, $x = 1$ पर है तथा स्थानीय न्यूनतम मान 4, $x = 2$ पर है, तो $p(0)$ बराबर है :

7. माना $f(x)$, घात 4 का एक बहुपद है जिसके क्रान्तिक बिन्दु $-1, 0, 1$ हैं। यदि $T = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = f(0)\}$, तो T के सभी अवयवों के वर्गों का योगफल है :

- (1) 6 (2) 8 (3) 4 (4) 2

8. यदि $x = 1$ फलन $f(x) = (3x^2 + ax - 2 - a) e^x$ का
एक क्रांतिक बिन्दु (critical point) है, तो :

- (1) $x = 1$, f का एक स्थानीय निम्नतम बिन्दु है तथा $x = -\frac{2}{3}$, f का एक स्थानीय उच्चतम बिन्दु है।

- (2) $x = 1$, f का एक स्थानीय उच्चतम बिन्दु है तथा $x = -\frac{2}{3}$, f का एक स्थानीय निम्नतम बिन्दु है।

- (3) $x = 1$ तथा $x = -\frac{2}{3}$, f के स्थानीय निम्नतम बिन्दु हैं।

- (4) $x = 1$ तथा $x = -\frac{2}{3}$ के स्थानीय उच्चतम बिन्दु हैं।

9. माना AD तथा BC क्षैतिज समतल भूमि पर क्रमशः A तथा B पर सीधे खड़े दो खम्मे हैं। यदि AD = 8 मी., BC = 11 मी. तथा AB = 10 मी. है, तो AB पर स्थित एक बिंदु M की, बिंदु A से वह दूरी (मीटरों में) जिसके लिए $MD^2 + MC^2$ का मान न्यूनतम है, है _____.

10. λ के सभी वास्तविक मानों, जिनके लिए फलन $f(x) = (1 - \cos^2 x)(\lambda + \sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, का केवल एक उच्चिष्ठ (maxima) तथा केवल एक निम्निष्ठ (minima) है, का समुच्चय है :

(1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{0\}$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (4) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \{0\}$

SOLUTION**1. NTA Ans. (2)**

Sol. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{f(x)}{x^3} \right) = 4$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 + ax^4 + bx^5$$

$$f(x) = 6x^2 + 4ax^3 + 5bx^4$$

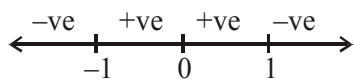
$$f'(1) = 0, f'(-1) = 0$$

$$a = 0, b = \frac{-6}{5} \Rightarrow f(x) = 2x^3 - \frac{6}{5}x^5$$

$$f(x) = 6x^2 - 6x^4$$

$$= 6x^2(1-x)(1+x)$$

Sign scheme for $f(x)$



Minima at $x = -1$

Maxima at $x = 1$

2. NTA Ans. (3)

Sol. $f''(x) = \lambda(x-1)$

$$f'(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \lambda x + C \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow C = \frac{-3\lambda}{2}$$

$$f(x) = \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{3\lambda}{2}x + d$$

$$f(1) = -6 \Rightarrow -11\lambda + 6d = -36 \quad \dots(i)$$

$$f(-1) = 10 \Rightarrow 5\lambda + 6d = 60 \quad \dots(ii)$$

from (i) & (ii) $\lambda = 6$ & $d = 5$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

Which has minima at $x = 3$

Ans. 3.00

3. NTA Ans. (1)

Sol. $F'(x) = x^2$ $g(x) = x^2 \int_1^x f(u) du \Rightarrow F'(1) = 0$

$$F''(x) = x^2 f(x) - 2x \int_1^x f(u) du$$

$$F''(1) = 1.f(1) - 2 \times 0$$

$$F''(1) = 3$$

$F'(1) = 0$ and $F''(1) = 3 > 0$ So, Minima

4. NTA Ans. (3)

Sol. Let thickness of ice be 'h'.

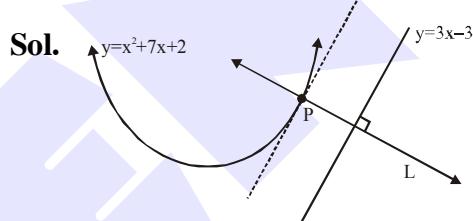
$$\text{Vol. of ice} = v = \frac{4\pi}{3}((10+h)^3 - 10^3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3}(3(10+h)^2) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\text{Given } \frac{dv}{dt} = 50 \text{ cm}^3/\text{min} \text{ and } h = 5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{4\pi}{3}(3(10+5)^2) \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{50}{4\pi \times 15^2} = \frac{1}{18\pi} \text{ cm/min}$$

5. Official Ans. by NTA (4)

Let L be the common normal to parabola $y = x^2 + 7x + 2$ and line $y = 3x - 3$

\Rightarrow slope of tangent of $y = x^2 + 7x + 2$ at P = 3

$$\Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{For P}} = 3$$

$$\Rightarrow 2x + 7 = 3 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -8$$

So P(-2, -8)

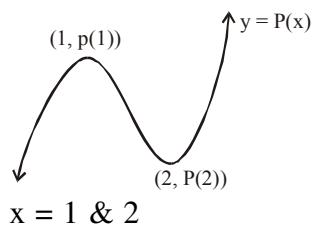
Normal at P : $x + 3y + C = 0$

$$\Rightarrow C = 26 \text{ (P satisfies the line)}$$

$$\boxed{\text{Normal : } x + 3y + 26 = 0}$$

6. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Since $p(x)$ has relative extreme at



so $p'(x) = 0$ at $x = 1$ & 2

$$\Rightarrow p'(x) = A(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow p(x) = \int A(x^2 - 3x + 2) dx$$

$$p(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) + C \quad \dots(1)$$

$$P(1) = 8$$

From (1)

$$8 = A\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) + C$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{5A}{6} + C \Rightarrow [48 = 5A + 6C] \quad \dots(3)$$

$$P(2) = 4$$

$$\Rightarrow 4 = A\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) + C$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{2A}{3} + C \Rightarrow [12 = 2A + 3C] \quad \dots(4)$$

From 3 & 4, $C = -12$

$$\text{So } P(0) = C = [-12]$$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$

$$\int df(x) = \int x^3 - x \, dx$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(x) = f(0)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = 0$$

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 + 2 + 2 = 4$$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = (3x^2 + ax - 2 - a)e^x$

$$f(x) = (3x^2 + ax - 2 - a)e^x + e^x(6x + a) \\ = e^x(3x^2 + x(6+a) - 2)$$

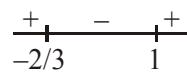
$$f(x) = 0 \text{ at } x = 1$$

$$\Rightarrow 3 + (6+a) - 2 = 0$$

$$a = -7$$

$$f'(x) = e^x(3x^2 - x - 2)$$

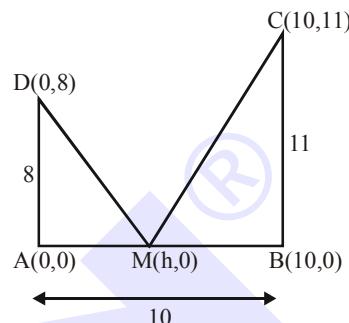
$$= e^x(x-1)(3x+2)$$



$x = 1$ is point of local minima

$x = \frac{-2}{3}$ is point of local maxima

9. Official Ans. by NTA (5.00)



$$(MD)^2 + (MC)^2 = h^2 + 64 + (h-10)^2 + 121 \\ = 2h^2 - 20h + 64 + 100 + 121 \\ = 2(h^2 - 10h) + 285 \\ = 2(h-5)^2 + 235$$

it is minimum if $h = 5$

10. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x) = (1 - \cos^2 x)(\lambda + \sin x) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = \lambda \sin^2 x + \sin^3 x$$

$$f'(x) = 2\lambda \sin x \cos x + 3 \sin^2 x \cos x$$

$$f'(x) = \sin x \cos x (2\lambda + 3 \sin x)$$

$$\sin x = 0, \frac{-2\lambda}{3}, (\lambda \neq 0)$$

for exactly one maxima & minima

$$\frac{-2\lambda}{3} \in (-1, 1) \Rightarrow \lambda \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \{0\}$$