

## FINAL JEE(Advanced) EXAMINATION - 2022

(Held On Sunday 28<sup>th</sup> AUGUST, 2022)

**PAPER-1**

**TEST PAPER WITH ANSWER**

### MATHEMATICS

खंड 1 ( अधिकतम अंक : 24 )

- इस खंड में आठ (08) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान (numerical value) है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर से संबंधित सही संख्यात्मक मान को माउज (MOUSE) और ऑन स्क्रीन (ON-SCREEN) वर्चुअल नुमेरिक कीपेड (VIRTUAL NUMERIC KEYPAD) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थानों पर दर्ज करें।
- यदि किसी संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो (02) स्थानों तक समेटें/शून्यांत करें (truncate/round-off)।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :

पूर्ण अंक	: +3 यदि सही संख्यात्मक मान (numerical value) को दर्ज किया गया है।
शून्य अंक	: 0 अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. प्रतिलोम त्रिकोणमितिय फलनों (inverse trigonometric functions) के केवल मुख्य मानों (only principal values) पर विचार करते हुए

$$\frac{3}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{2}{2+\pi^2}} + \frac{1}{4} \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}\pi}{2+\pi^2} + \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

का मान \_\_\_\_\_ है।

2. माना कि  $\alpha$  एक धनात्मक वास्तविक संख्या (positive real number) है। माना कि फलनों (functions)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  एवं  $g: (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  को

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \text{ एवं } g(x) = \frac{2 \log_e(\sqrt{x} - \sqrt{\alpha})}{\log_e(e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{\alpha}})}.$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। तब  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(g(x))$  का मान \_\_\_\_\_ है।

3. महामारी के एक अध्ययन में 900 व्यक्तियों के आँकड़े (data) एकत्रित किये गये। यह पाया गया कि 190 व्यक्तियों को बुखार के लक्षण थे, 220 व्यक्तियों को खांसी के लक्षण थे, 220 व्यक्तियों को श्वासरोग के लक्षण थे, 330 व्यक्तियों को बुखार या खांसी या दोनों के लक्षण थे, 350 व्यक्तियों को खांसी या श्वासरोग या दोनों के लक्षण थे, 340 व्यक्तियों को बुखार या श्वासरोग या दोनों के लक्षण थे, 30 व्यक्तियों को तीनों (बुखार, खांसी एवं श्वासरोग) के लक्षण थे। यदि इन 900 व्यक्तियों से एक व्यक्ति को यादृच्छिक रूप (randomly) से चुना जाता है, तब उस चुने गये व्यक्ति को अधिकतम (at most) एक लक्षण होने की प्रायिकता (probability) \_\_\_\_\_ है।

4. माना कि  $z$  एक शून्येतर काल्पनिक भाग (non-zero imaginary part) वाली सम्मिश्र संख्या (complex number) है। यदि

$$\frac{2+3z+4z^2}{2-3z+4z^2}$$

एक वास्तविक संख्या (real number) है, तब  $|z|^2$  का मान \_\_\_\_\_ है।

5. माना कि  $\bar{z}$  एक सम्मिश्र संख्या (complex number)  $z$  के सम्मिश्र संयुगमी (complex conjugate) को निरूपित करता है एवं  $i = \sqrt{-1}$  है। सम्मिश्र संख्याओं के समुच्य (set of complex numbers) में, समीकरण

$$\bar{z} - z^2 = i(\bar{z} + z^2)$$

के भिन्न मूलों (distinct roots) की संख्या \_\_\_\_\_ है।



6. माना कि  $l_1, l_2, \dots, l_{100}$  सार्वअंतर (common difference)  $d_1$  वाली एक समांतर श्रेढ़ी (arithmetic progression) के क्रमागत पद (consecutive terms) हैं, एवं माना कि  $w_1, w_2, \dots, w_{100}$  सार्वअंतर (common difference)  $d_2$  वाली एक दूसरी समांतर श्रेढ़ी (arithmetic progression) के क्रमागत पद हैं जहाँ  $d_1 d_2 = 10$  है। प्रत्येक  $i = 1, 2, \dots, 100$  के लिए, माना कि  $R_i$  एक आयत (rectangle) है जिसकी लम्बाई  $l_i$ , चौड़ाई  $w_i$  एवं क्षेत्रफल  $A_i$  है। यदि  $A_{51} - A_{50} = 1000$  है तब  $A_{100} - A_{90}$  का मान \_\_\_\_\_ है।

7. संवृत अन्तराल (closed interval)  $[2022, 4482]$  में अंकों 0, 2, 3, 4, 6, 7 से बनने वाले 4-अंकीय (4-digit) पूर्णांकों (integers) की संख्या \_\_\_\_\_ है।

8. माना कि  $ABC$  एक त्रिभुज (triangle) है जिसमें  $AB = 1, AC = 3$  एवं  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  है। यदि त्रिज्या (radius)  $r > 0$  का एक वृत (circle) भुजाओं  $AB, AC$  को स्पर्श करता है एवं त्रिभुज  $ABC$  के परिवृत (circumcircle) को अंदर से स्पर्श (touches internally) करता है, तब  $r$  का मान \_\_\_\_\_ है।

## खंड 2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में छह (06) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	: +4 यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।
आंशिक अंक	: +3 यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।
आंशिक अंक	: +2 यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।
आंशिक अंक	: +1 यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प एक सही विकल्प है।
शून्य अंक	: 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: -2 अन्य सभी परिस्थितियों में

### 9. समीकरण (equation)

$$\int_1^e \frac{(\log_e x)^{1/2}}{x \left(a - (\log_e x)^{3/2}\right)^2} dx = 1, \quad a \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

पर विचार कीजिए। निम्न कथनों में से कौनसा (से) सत्य है (हैं) ?

- (A) कोई भी  $a$  उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है
- (B) एक पूर्णांक (integer)  $a$  उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करता है
- (C) एक अपरिमेय संख्या (irrational number)  $a$  उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करता है
- (D) एक से ज्यादा  $a$  उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करते हैं

10. माना कि  $a_1, a_2, a_3, \dots$  एक सार्वअंतर (common difference) 8 वाली समांतर श्रेढ़ी (arithmetic progression) है जहाँ  $a_1 = 7$  है। माना कि  $T_1, T_2, T_3, \dots$  इस प्रकार है कि  $T_1 = 3$  एवं सभी  $n \geq 1$  के लिए  $T_{n+1} - T_n = a_n$  है। तब निम्न में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

- (A)  $T_{20} = 1604$
- (B)  $\sum_{k=1}^{20} T_k = 10510$
- (C)  $T_{30} = 3454$
- (D)  $\sum_{k=1}^{30} T_k = 35610$

11. माना कि  $P_1$  एवं  $P_2$ ,

$$P_1: 10x + 15y + 12z - 60 = 0,$$

$$P_2: -2x + 5y + 4z - 20 = 0.$$

द्वारा दिए गए दो समतल (planes) हैं। निम्न सरल रेखाओं (straight lines) में से कौन सी, ऐसे चतुष्फलक (tetrahedron) का एक किनारा (edge) हो सकती है (हैं), जिसके दो फलक (faces)  $P_1$  एवं  $P_2$  पर स्थित हैं ?

(A)  $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{5}$

(B)  $\frac{x-6}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

(C)  $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{4}$

(D)  $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{3}$

12. माना कि  $S$ , एक बिंदु  $Q$  का

$$\vec{r} = -(t+p)\hat{i} + \hat{j} + (1+p)\hat{k}$$

द्वारा दिए गए समतल के सापेक्ष प्रतिविंध (reflection) है जहाँ  $t, p$  वास्तविक प्राचल (real parameters) हैं एवं  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  तीन निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) की धनात्मक (positive) दिशाओं में एकक सदिश (unit vectors) हैं। यदि  $Q$  एवं  $S$  के स्थिति सदिश (position vectors) क्रमशः  $10\hat{i} + 15\hat{j} + 20\hat{k}$  एवं  $\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$  हैं, तब निम्न में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

(A)  $3(\alpha + \beta) = -101$

(B)  $3(\beta + \gamma) = -71$

(C)  $3(\gamma + \alpha) = -86$

(D)  $3(\alpha + \beta + \gamma) = -121$

13. परवलय (parabola)  $y^2 = 4x$  पर विचार कीजिए। माना कि  $S$  इस परवलय की नाभि (focus) है। बिंदु  $P = (-2, 1)$  से परवलय पर डाली गई दो स्पर्श रेखायें (tangents) परवलय को बिंदुओं  $P_1$  एवं  $P_2$  पर मिलती हैं। माना कि  $Q_1$  एवं  $Q_2$  क्रमशः रेखाओं  $SP_1$  एवं  $SP_2$  पर ऐसे बिन्दु हैं कि  $PQ_1, SP_1$  पर लंब (perpendicular) है, और  $PQ_2, SP_2$  पर लंब है। तब निम्न में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

(A)  $SQ_1 = 2$

(B)  $Q_1Q_2 = \frac{3\sqrt{10}}{5}$

(C)  $PQ_1 = 3$

(D)  $SQ_2 = 1$

14. माना कि  $|M|$  एक वर्ग आव्यूह (square matrix)  $M$  के सारणिक (determinant) को निरूपित करता है। माना कि

$$\text{फलन (function)} g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \text{ को}$$

$$g(\theta) = \sqrt{f(\theta) - 1} + \sqrt{f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 1}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sin \theta & 1 \\ -\sin \theta & 1 & \sin \theta \\ -1 & -\sin \theta & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin \pi & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) & \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) & -\cos\frac{\pi}{2} & \log_e\left(\frac{4}{\pi}\right) \\ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) & \log_e\left(\frac{\pi}{4}\right) & \tan \pi \end{vmatrix}.$$

है। माना कि  $p(x)$  एक ऐसा द्विघातीय बहुपद (quadratic polynomial) है जिसके मूल (roots) फलन  $g(\theta)$  के निम्नतम (minimum) एवं उच्चतम (maximum) मान है एवं  $p(2) = 2 - \sqrt{2}$  है। तब निम्न में से कौन सा (से) सत्य है (हैं) ?

(A)  $p\left(\frac{3+\sqrt{2}}{4}\right) < 0$

(B)  $p\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{4}\right) > 0$

(C)  $p\left(\frac{5\sqrt{2}-1}{4}\right) > 0$

(D)  $p\left(\frac{5-\sqrt{2}}{4}\right) < 0$

**खंड 3 ( अधिकतम अंक : 12)**

- इस खंड में चार (04) सूची-सुमेलन (Matching List) सेट्स (Sets) हैं।
- प्रत्येक सूची-सुमेलन (set) में एक (01) एकाधिक विकल्प प्रश्न (Multiple Choice Question) है।
- प्रत्येक सूची-सुमेलन सेट में दो सूचियाँ हैं : **सूची-I** और **सूची-II**
- सूची-I में चार (04) प्रविष्टियाँ (I), (II), (III) और (IV) हैं एवं सूची-II में पाँच (05) प्रविष्टियाँ (P), (Q), (R), (S) और (T) हैं।
- प्रत्येक एकाधिक विकल्प प्रश्न में **सूची-I** और **सूची-II** पर आधारित चार विकल्प दिए गए हैं और इन विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही एकाधिक विकल्प प्रश्न की शर्त पूरा करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	: +3 यदि सिफ़र सही विकल्प को ही चुना गया है।
शून्य अंक	: 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।
ऋण अंक	: -1 अन्य सभी परिस्थितियों में।

**15.** निम्न सूचियों पर विचार कीजिए –

सूची-I		सूची-II	
(I)	$\left\{ x \in \left[ -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] : \cos x + \sin x = 1 \right\}$	(P)	में दो अवयव (two elements) हैं
(II)	$\left\{ x \in \left[ -\frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18} \right] : \sqrt{3} \tan 3x = 1 \right\}$	(Q)	में तीन अवयव (three elements) हैं
(III)	$\left\{ x \in \left[ -\frac{6\pi}{5}, \frac{6\pi}{5} \right] : 2 \cos(2x) = \sqrt{3} \right\}$	(R)	में चार अवयव (four elements) हैं
(IV)	$\left\{ x \in \left[ -\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right] : \sin x - \cos x = 1 \right\}$	(S)	में पांच अवयव (five elements) हैं
		(T)	में छह अवयव (six elements) हैं

सही विकल्प है :

- (A) (I) → (P); (II) → (S); (III) → (P); (IV) → (S)
- (B) (I) → (P); (II) → (P); (III) → (T); (IV) → (R)
- (C) (I) → (Q); (II) → (P); (III) → (T); (IV) → (S)
- (D) (I) → (Q); (II) → (S); (III) → (P); (IV) → (R)

16. दो खिलाड़ी  $P_1$  एवं  $P_2$  एक दूसरे के विरुद्ध एक खेल खेलते हैं। इस खेल के प्रत्येक राउंड (round) में दोनों खिलाड़ी एक-एक बार एक न्याय पासा (fair die) उछालते हैं, जहाँ पासे के छह फलकों (six faces) पर छह भिन्न संख्याएँ (six distinct numbers) हैं। माना कि  $x$  एवं  $y$  क्रमशः  $P_1$  एवं  $P_2$  द्वारा पासे के उछाले जाने पर प्रकट होने वाली संख्याओं को निरूपित करते हैं। यदि  $x > y$  होता है, तब  $P_1$  को 5 अंक मिलता है एवं  $P_2$  को 0 अंक मिलता है। यदि  $x = y$  होता है, तब प्रत्येक खिलाड़ी को 2 अंक मिलते हैं। यदि  $x < y$  होता है, तब  $P_1$  को 0 अंक मिलता है एवं  $P_2$  को 5 अंक मिलता है। माना कि  $i$ -वाँ ( $i^{\text{th}}$ ) राउंड खेलने के बाद,  $X_i$  एवं  $Y_i$  क्रमशः  $P_1$  एवं  $P_2$  के द्वारा प्राप्त कुल अंक हैं।

सूची-I		सूची-II	
(I)	$(X_2 \geq Y_2)$ होने की प्रायिकता (probability)	(P)	$\frac{3}{8}$ है
(II)	$(X_2 > Y_2)$ होने की प्रायिकता	(Q)	$\frac{11}{16}$ है
(III)	$(X_3 = Y_3)$ होने की प्रायिकता	(R)	$\frac{5}{16}$ है
(IV)	$(X_3 > Y_3)$ होने की प्रायिकता	(S)	$\frac{355}{864}$ है
		(T)	$\frac{77}{432}$ है

सही विकल्प है :

- (A) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (T); (IV)  $\rightarrow$  (S)
- (B) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (T); (IV)  $\rightarrow$  (T)
- (C) (I)  $\rightarrow$  (P); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (Q); (IV)  $\rightarrow$  (S)
- (D) (I)  $\rightarrow$  (P); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (Q); (IV)  $\rightarrow$  (T)

17. माना कि  $p, q$  एवं  $r$  शून्येतर वास्तविक संख्याएँ (nonzero real numbers) हैं जो एक हरात्मक श्रेढ़ी (harmonic progression) के क्रमशः 10वाँ, 100वाँ एवं 1000वाँ पद (terms) हैं। रैखिक समीकरणों के निकाय (system of linear equations)

$$x + y + z = 1$$

$$10x + 100y + 1000z = 0$$

$$qr x + pr y + pq z = 0$$

पर विचार कीजिए।

सूची -I		सूची-II	
(I)	यदि $\frac{q}{r} = 10$ है, तब रैखिक समीकरणों के निकाय का	(P)	हल $x = 0, y = \frac{10}{9}, z = -\frac{1}{9}$ है
(II)	यदि $\frac{p}{r} \neq 100$ है, तब रैखिक समीकरणों के निकाय का	(Q)	हल $x = \frac{10}{9}, y = -\frac{1}{9}, z = 0$ है
(III)	यदि $\frac{p}{q} \neq 10$ है, तब रैखिक समीकरणों के निकाय का	(R)	अनंत हल (infinitely many solutions) है
(IV)	यदि $\frac{p}{q} = 10$ है, तब रैखिक समीकरणों के निकाय का	(S)	कोई हल नहीं (no solution) है
		(T)	कम से कम एक हल (at least one solution) है

सही विकल्प है :

- (A) (I)  $\rightarrow$  (T); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (S); (IV)  $\rightarrow$  (T)
- (B) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (S); (III)  $\rightarrow$  (S); (IV)  $\rightarrow$  (R)
- (C) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (R); (III)  $\rightarrow$  (P); (IV)  $\rightarrow$  (R)
- (D) (I)  $\rightarrow$  (T); (II)  $\rightarrow$  (S); (III)  $\rightarrow$  (P); (IV)  $\rightarrow$  (T)

**18. दीर्घवृत्त (ellipse)**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

पर विचार कीजिए। माना कि  $H(\alpha, 0)$ ,  $0 < \alpha < 2$ , एक बिंदु (point) है। बिंदु  $H$  से होती हुई एवं  $y$ -अक्ष के समांतर (parallel to the  $y$ -axis) एक सरल रेखा (straight line) दीर्घवृत्त एवं इसके सहवृत्त (auxiliary circle) को प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में क्रमशः बिंदुओं  $E$  एवं  $F$  पर प्रतिच्छेदित (intersect) करती है। बिंदु  $E$  पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा (tangent) धनात्मक  $x$ -अक्ष को एक बिंदु  $G$  पर प्रतिच्छेदित करती है। मान लिजिए कि  $F$  एवं मूलबिंदु (origin) को जोड़ने वाली सरल रेखा, धनात्मक  $x$ -अक्ष के साथ एक कोण (angle)  $\phi$  बनाती है।

सूची-I		सूची-II	
(I)	यदि $\phi = \frac{\pi}{4}$ है, तब त्रिभुज $FGH$ का क्षेत्रफल	(P)	$\frac{(\sqrt{3}-1)^4}{8}$ है
(II)	यदि $\phi = \frac{\pi}{3}$ है, तब त्रिभुज $FGH$ का क्षेत्रफल	(Q)	1 है
(III)	यदि $\phi = \frac{\pi}{6}$ है, तब त्रिभुज $FGH$ का क्षेत्रफल	(R)	$\frac{3}{4}$ है
(IV)	यदि $\phi = \frac{\pi}{12}$ है, तब त्रिभुज $FGH$ का क्षेत्रफल	(S)	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ है
		(T)	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ है

सही विकल्प है:

- (A) (I)  $\rightarrow$  (R); (II)  $\rightarrow$  (S); (III)  $\rightarrow$  (Q); (IV)  $\rightarrow$  (P)
- (B) (I)  $\rightarrow$  (R); (II)  $\rightarrow$  (T); (III)  $\rightarrow$  (S); (IV)  $\rightarrow$  (P)
- (C) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (T); (III)  $\rightarrow$  (S); (IV)  $\rightarrow$  (P)
- (D) (I)  $\rightarrow$  (Q); (II)  $\rightarrow$  (S); (III)  $\rightarrow$  (Q); (IV)  $\rightarrow$  (P)