

# FINAL JEE(Advanced) EXAMINATION - 2019

(Held On Monday 27<sup>th</sup> MAY, 2019)

## PAPER-2

## TEST PAPER WITH ANSWER

### PART-3 : MATHEMATICS

खंड-1 : (अधिकतम अंक: 32)

- इस खंड में आठ (08) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :  
 पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सारे) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है।  
 आंशिक अंक : +3 यदि चारों विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है।  
 आंशिक अंक : +2 यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं।  
 आंशिक अंक : +1 यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प को चुना गया है और चुना हुआ विकल्प सही विकल्प है।  
 शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।  
 ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में।
- उदाहरण यदि किसी प्रश्न के लिए केवल विकल्प (A), (B) और (D) सही विकल्प हैं, तब  
 केवल विकल्प (A), (B) और (D) चुनने पर +4 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (A) और (B) चुनने पर +2 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (A) और (D) चुनने पर +2 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (B) और (D) चुनने पर +2 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (A) चुनने पर +1 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (B) चुनने पर +1 मिलेंगे  
 केवल विकल्प (D) चुनने पर +1 मिलेंगे  
 कोई भी विकल्प ना चुनने पर (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित रहने पर) 0 अंक मिलेंगे और अन्य किसी विकल्पों को चुनने पर -1 अंक मिलेंगे।

1. माना कि :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  का मान  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 5)$  द्वारा दिया गया है। परिभाषित करें

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, x > 0.$$

तब निम्न में से कौनसा (से) विकल्प सही है (हैं)?

- (1) F का एक स्थानीय निम्नतम (local minimum)  $x = 1$  पर है
- (2) F का एक स्थानीय उच्चतम (local maximum)  $x = 2$  पर है
- (3) सभी  $x \in (0, 5)$  के लिए  $F(x) \neq 0$  है
- (4) F के दो स्थानीय उच्चतम और एक स्थानीय निम्नतम  $(0, \infty)$  में हैं

Ans. (1,2,3)

2. माना कि  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| > 1$  के लिए

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{n}}{n^{7/3} \left( \frac{1}{(an+1)^2} + \frac{1}{(an+2)^2} + \dots + \frac{1}{(an+n)^2} \right)} \right) = 54$$

तब  $a$  का (के) सम्भावित मान है (हैं)

- (1) 8 (2) -9 (3) -6 (4) 7

Ans. (1,2)

3. तीन रेखाएं

$$L_1 : \vec{r} = \lambda \hat{i}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$L_2 : \vec{r} = \vec{k} + \mu \hat{j}, \mu \in \mathbb{R} \text{ और}$$

$$L_3 : \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + v \hat{k}, v \in \mathbb{R}$$

दी गयी हैं।  $L_2$  के किस बिंदु (किन बिंदुओं)  $Q$  के लिए हम  $L_1$  पर एक बिंदु  $P$  और  $L_3$  पर एक बिंदु  $R$  प्राप्त कर सकते हैं ताकि  $P, Q$  और  $R$  सरेख (collinear) हो जायें ?

- (1)  $\hat{k} + \hat{j}$  (2)  $\hat{k}$  (3)  $\hat{k} + \frac{1}{2} \hat{j}$  (4)  $\hat{k} - \frac{1}{2} \hat{j}$

Ans. (3,4)

4. माना कि  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  एक फलन है। हम कहते हैं कि  $f$  में

गुण 1 (PROPERTY 1) है यदि  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{\sqrt{|h|}}$  का अस्तित्व (exists) है और वह परिमित (finite) है, और

गुण 3 (PROPERTY 2) है यदि  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h^2}$  का अस्तित्व (exists) है और वह परिमित (finite) है।

तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं)?

- (1)  $f(x) = x|x|$  में गुण 2 है (2)  $f(x) = x^{2/3}$  में गुण 1 है  
(3)  $f(x) = \sin x$  में गुण 2 है (4)  $f(x) = |x|$  में गुण 1 है

Ans. (2,4)

5. अऋणात्मक पूर्णांकों (non-negative integers)  $n$  के लिए माना कि

$$f(n) = \frac{\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right) \sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^n \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}$$

माना कि  $\cos^{-1} x$  का मान  $[0, \pi]$  में है, तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं) ?

- (1)  $\sin(7 \cos^{-1} f(5)) = 0$  (2)  $f(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \frac{1}{2}$  (4) If  $\alpha = \tan(\cos^{-1} f(6))$ , तब  $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$

Ans. (1,2,4)

6. माना कि  $P_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } X = \sum_{k=1}^6 P_k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} P_k^T$$

जहाँ आव्यूह (matrix)  $P_k$  के परिवर्त (transpose) को  $P_k^T$  से दर्शाया गया है। तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं) ?

- (1)  $X - 30I$  एक व्युत्क्रमणीय (invertible) आव्यूह है।  
(2)  $X$  के विकर्ण (diagonal) की प्रविष्टियों (entries) का योग 18 है

(3) यदि  $X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , तब  $\alpha = 30$

- (4)  $X$  एक सममित (symmetric) आव्यूह है

Ans. (2,3,4)

7. माना कि  $x \in \mathbb{R}$  और माना कि  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 6 \end{bmatrix}$  और  $R = PQP^{-1}$ .

तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं) ?

(1)  $x = 1$  के लिए, एक ऐसा मात्रक सदिश (unit vector)  $\alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}$  सम्भव है, जिसके लिए  $R \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- (2) एक ऐसी वास्तविक संख्या  $x$  सम्भव है जिसके लिए  $PQ = QP$

(3) सभी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $\det R = \det \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{bmatrix} + 8$

(4)  $x = 0$  के लिए, यदि  $R \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ , तब  $a + b = 5$

Ans. (3,4)

8. माना कि  $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x^2}$ ,  $x > 0$

माना कि  $f$  के सभी स्थानीय उच्चतम (local maximum) बिंदु  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$  हैं और  $f$  के सभी स्थानीय न्यूनतम (local minimum) बिंदु  $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < \dots$  हैं। तब निम्न में से कौन सा (से) विकल्प सही है (हैं)?

- (1) प्रत्येक  $n$  के लिए  $|x_n - y_n| > 1$  है (2)  $x_1 < y_1$   
(3) प्रत्येक  $n$  के लिए  $x_n \in \left(2n, 2n + \frac{1}{2}\right)$  है (4) प्रत्येक  $n$  के लिए  $x_{n+1} - x_n > 2$  है

Ans. (1,3,4)

### खंड-2 : (अधिकतम अंक: 18)

- इस खंड में छः (06) प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान (NUMERICAL VALUE) है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के सही संख्यात्मक मान को माउज़ (mouse) और ऑन-स्क्रीन (on-screen) वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड (virtual numeric keypad) के प्रयोग से उत्तर के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज करें। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off) करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्न योजना के अनुसार होगा :-  
पूर्ण अंक : +3 यदि दर्ज किया गया संख्यात्मक मान (numerical value) ही सही उत्तर है।  
शून्य अंक : 0 अन्य सभी परिस्थितियों में।

1. अंतराल (interval)  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  में

$$\sec^{-1} \left( \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{10} \sec \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \right) \sec \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{(k+1)\pi}{2} \right) \right)$$

का मान बराबर है

Ans. (0.00)

2. माना  $|X|$  समुच्चय (set)  $X$  के तत्वों (elements) की संख्या दर्शाता है। माना कि  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  एक प्रतिदर्श समष्टि (sample space) है जिसमें प्रत्येक तत्व के आने की संभावना समान है। यदि  $A$  और  $B$ , प्रतिदर्श समष्टि  $S$  से सम्बद्ध स्वतंत्र घटनाएं (independent events) हैं तब उन क्रमित युग्मों (ordered pairs)  $(A, B)$  की संख्या जिसमें  $1 \leq |B| < |A|$  हो, बराबर है

Ans. (422.00)

3. पाँच व्यक्ति  $A, B, C, D$  और  $E$  वृत्तीय क्रम (circular arrangement) में बैठे हैं। यदि प्रत्येक को तीन रंगों लाल, नीले और हरे रंग की टोपियों में से एक रंग की टोपी दी जाती है, तब टोपियों को कितने प्रकार से बाँट सकते हैं जिससे संलग्न (adjacent) बैठे व्यक्तियों की टोपियों के रंग भिन्न हों।

Ans. (30.00)

4. माना कि किसी धनात्मक पूर्णांक (positive integer)  $n$  के लिए

$$\det \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n k & \sum_{k=0}^n {}^nC_k k^2 \\ \sum_{k=0}^n {}^nC_k k & \sum_{k=0}^n {}^nC_k 3^k \end{bmatrix} = 0, \text{ तब } \sum_{k=0}^n \frac{{}^nC_k}{k+1} \text{ बराबर है}$$

Ans. (6.20)

5. समाकल (integral)  $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos \theta}}{(\sqrt{\cos \theta} + \sqrt{\sin \theta})^5} d\theta$  का मान बराबर है

Ans. (0.50)

6. माना कि  $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  और  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$  दो सदिश (vector) हैं। माना कि एक सदिश  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  है। यदि सदिश  $(\vec{a} + \vec{b})$  पर  $\vec{c}$  का प्राक्षेप (projection)  $3\sqrt{2}$  है, तब  $(\vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{c}$  का निम्नतम (minimum) मान बराबर है

Ans. (18.00)

### खंड-3 : (अधिकतम अंक: 12)

- इस खंड में दो (02) सूची-सुमेलन (List-Match) सेट्स (sets) हैं।
- प्रत्येक सूची-सुमेलन सेट (set) में दो (02) एकाधिक विकल्प प्रश्न (Multiple Choice Questions) हैं।
- प्रत्येक सूची-सुमेलन सेट में दो सूचियाँ हैं : सूची-I और सूची-II
- सूची-I में चार प्रविष्टियाँ (I), (II), (III) और (IV) हैं एवं सूची-II में छः प्रविष्टियाँ (P), (Q), (R), (S), (T) और (U) हैं।
- प्रत्येक एकाधिक विकल्प प्रश्न में सूची-I और सूची-II पर आधारित चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही एकाधिक विकल्प प्रश्न की शर्त को पूरा करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांक निम्नयोजना के अनुसार होगा :-  
पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।  
शून्य अंक : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)।  
ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में

1. अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

माना कि  $f(x) = \sin(\pi \cos x)$  और  $g(x) = \cos(2\pi \sin x)$  दो फलन (function) हैं जो  $x > 0$  में परिभाषित हैं। निम्नलिखित समुच्चय (sets) जिनके तत्वों को बढ़ते हुए क्रम में लिखा गया है, इस प्रकार परिभाषित हैं :

$$X = \{x : f(x) = 0\}, \quad Y = \{x : f'(x) = 0\}$$

$$Z = \{x : g(x) = 0\}, \quad W = \{x : g'(x) = 0\}.$$

सूची-I(List-I) X,Y,Z और W समुच्चय है। सूची-II(List-II) में इन समुच्चयों के बारे में कुछ सूचनाएँ हैं।

सूची-I

- (I) X  
(II) Y  
(III) Z  
(IV) W

सूची-II

- (P)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi \right\}$   
(Q) समान्तर श्रेणी (An arithmetic progression)  
(R) समान्तर श्रेणी नहीं है (Not an arithmetic progression)  
(S)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right\}$   
(T)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \right\}$   
(U)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

निम्न में से कौनसा एकमात्र संयोजन सही है?

Options

- (1) (II), (R), (S) (2) (I), (P), (R)  
(3) (II), (Q), (T) (4) (I), (Q), (U)

Ans. (3)

2. अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

माना कि  $f(x) = \sin(\pi \cos x)$  और  $g(x) = \cos(2\pi \sin x)$  दो फलन (function) हैं जो  $x > 0$  में परिभाषित हैं। निम्नलिखित समुच्चय (sets) जिनके तत्वों को बढ़ते हुए क्रम में लिखा गया है, इस प्रकार परिभाषित हैं :

$$X = \{x : f(x) = 0\}, \quad Y = \{x : f'(x) = 0\}$$

$$Z = \{x : g(x) = 0\}, \quad W = \{x : g'(x) = 0\}.$$

सूची-I(List-I) X,Y,Z और W समुच्चय है। सूची-II(List-II) में इन समुच्चयों के बारे में कुछ सूचनाएँ हैं।

सूची-I

- (I) X  
(II) Y  
(III) Z  
(IV) W

सूची-II

- (P)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi \right\}$   
(Q) समान्तर श्रेणी (An arithmetic progression)  
(R) समान्तर श्रेणी नहीं है (Not an arithmetic progression)  
(S)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right\}$   
(T)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \right\}$   
(U)  $\supseteq \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

निम्न में से कौनसा एकमात्र संयोजन सही है?

Options

- (1) (IV), (Q), (T) (2) (IV), (P), (R), (S) (3) (III), (R), (U) (4) (III), (P), (Q), (U)

Ans. (2)

3. अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

माना कि वृत्त (circle)  $C_1 : x^2 + y^2 = 9$  और वृत्त  $C_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$  एक दूसरे को बिन्दुओं X और Y पर काटते हैं। माना लीजिये एक और वृत्त  $C_3 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  निम्नलिखित शर्तों को संतुष्ट करता है :

- (i)  $C_3$  का केंद्र (centre)  $C_1$  और  $C_2$  के केंद्रों के संरेख (Collinear) है।
- (ii)  $C_1$  और  $C_2$  दोनों  $C_3$  के अन्दर हैं और
- (iii)  $C_3$ ,  $C_1$  को M और  $C_2$  को N पर स्पर्श करता है।

माना कि X और Y से होकर जाने वाली रेखा  $C_3$  को Z और W पर काटती है तथा  $C_1$  और  $C_3$  की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (Common tangent) परवलय  $x^2 = 8\alpha y$  की स्पर्श रेखा है।

सूची-I(List-I) में कुछ व्यंजक (expression) हैं जिनका मान नीचे दी गयी सूची-II(List-II) में है

| सूची-I                                                                          | सूची-II            |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| (I) $2h + k$                                                                    | (P) 6              |
| (II) $\frac{ZW \text{ की लम्बाई}}{XY \text{ की लम्बाई}}$                        | (Q) $\sqrt{6}$     |
| (III) $\frac{\text{त्रिभुज MZN का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ZMW का क्षेत्रफल}}$ | (R) $\frac{5}{4}$  |
| (IV) $\alpha$                                                                   | (S) $\frac{21}{5}$ |
|                                                                                 | (T) $2\sqrt{6}$    |
|                                                                                 | (U) $\frac{10}{3}$ |

निम्न में से कौन सा एकमात्र संयोजन गलत है ?

Options

- (1) (IV), (S)                      (2) (IV), (U)                      (3) (III), (R)                      (4) (I), (P)

Ans. (1)

4. अनुच्छेद में दी गई जानकारी के आधार पर सूचियों का उचित मिलान करके प्रश्न का उत्तर दें।

माना कि वृत्त (circles)  $C_1 : x^2 + y^2 = 9$  और वृत्त  $C_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$  एक दूसरे को बिन्दुओं X और Y पर काटते हैं। माना लीजिये एक और वृत्त  $C_3 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$  निम्नलिखित शर्तों को संतुष्ट करता है :

- (i)  $C_3$  का केंद्र (centre)  $C_1$  और  $C_2$  के केंद्रों के संरेख (Collinear) है।
- (ii)  $C_1$  और  $C_2$  दोनों  $C_3$  के अन्दर हैं और
- (iii)  $C_3$ ,  $C_1$  को M और  $C_2$  को N पर स्पर्श करता है।

माना कि X और Y से होकर जाने वाली रेखा  $C_3$  को Z और W पर काटती है तथा  $C_1$  और  $C_3$  की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (Common tangent) परवलय  $x^2 = 8\alpha y$  की स्पर्श रेखा है।

सूची-I(List-I) में कुछ व्यंजक (expression) हैं जिनका मान नीचे दी गयी सूची-II(List-II) में है

| सूची-I                                                                          | सूची-II           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| (I) $2h + k$                                                                    | (P) 6             |
| (II) $\frac{ZW \text{ की लम्बाई}}{XY \text{ की लम्बाई}}$                        | (Q) $\sqrt{6}$    |
| (III) $\frac{\text{त्रिभुज MZN का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ZMW का क्षेत्रफल}}$ | (R) $\frac{5}{4}$ |

(IV)  $\alpha$

(S)  $\frac{21}{5}$

(T)  $2\sqrt{6}$

(U)  $\frac{10}{3}$

निम्न में से कौन सा एकमात्र संयोजन सही है ?

**Options**

(1) (II), (T)

(2) (I), (S)

(3) (I), (U)

(4) (II), (Q)

**Ans. (4)**

ALLEN